Corrigé DM1 - TS2

15/09/2016

1 Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]5;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x-13}{x-5}$$

et C_f la courbe représentative.

a) Etude de la limite de f en 5. 5 est la borne inférieure du domaine de définition et correspond à la valeur interdite de la fonction f. En 5, le numérateur prend la valeur -3. Le dénominteur prend la valeur 0 et pour $x > 5$, $x - 5$ reste positif.

$$\lim_{x\to 5+} 2x - 13 = -3 \qquad \lim_{x\to 5+} x - 5 = 0$$

On en déduit

$$\lim_{x\to 5+} \frac{2x-13}{x-5} = -\infty$$

b) Etude de la limite de f en $+\infty$. La limite du numérateur est $+\infty$, la limite du dénominateur est $-\infty$, on a donc une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Nous devons lever l'indétermination.

$$f(x) = \frac{2x-13}{x-5} = \frac{x\left(2-\dfrac{13}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\left(2-\dfrac{13}{x}\right)}{\left(1-\dfrac{5}{x}\right)}$$

Tous les termes de la forme k/x ont pour limite 0, donc le numérateur a pour limite 2 et le dénominateur a pour limite 1 d'ou la conclusion

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x-13}{x-5} = 2$$

c) En plus l'infini : nous avons un limite finie à l'infini, donc une asymptote horizontale d'équation y= $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ donc $y = 2$.

En 5 nous avons une limite infinie en une valeur finie, donc une asymptote verticale d'équation $x = 5$

d) Etude de la position relative de la courbe C_f et de l'asymptote horizontale, donc de la droite d'équation $y = 2$. On calcule la différence

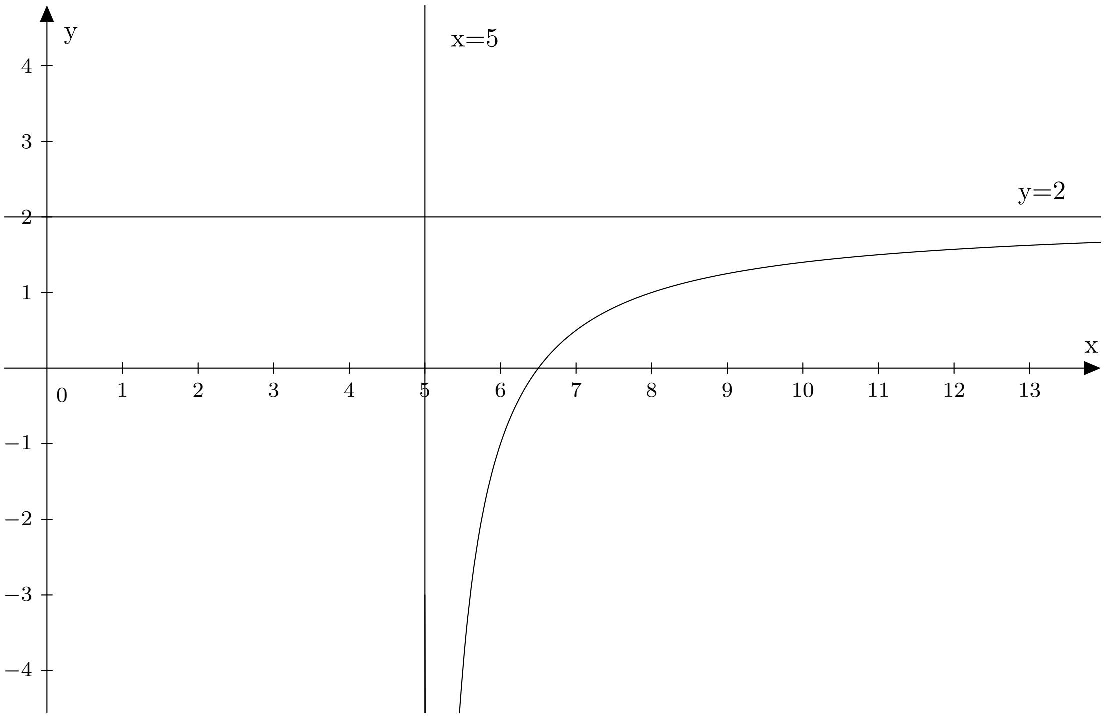
$$\begin{aligned} f(x) - 2 =& \frac{2x-13}{x-5} - 2 \\ =& \frac{2x-13}{x-5} - \frac{2(x-5)}{x-5} \\ =& \frac{-3}{x-5} \end{aligned}$$

$f(x)-2$ est manifestement toujours négatif, sur le domaine de définition de la fonction. En effet, le numérateur -3 est négaitif. Le dénominateur est toujours positif puisque x est plus grand que 5. Par conséquent

$$\forall x \in]5;+\infty[\qquad f(x)-2<0$$

On en conclut que la courbe C_f est au dessous de son asymptote.

e) Trace de la courbe. La fonction f est une fonction homographique, (Type de fonction étudié en même temps que la fonction inverse). Le courbe représentative est composée de deux arcs d'hyperboles de part et d'autre de l'asymptote verticale. Ici on ne s'intéresse qu'à l'une des branches de l'hyperbole, celle pour $x>5$. Pour tracer la courbe, il suffit donc de tracer le repère, de tracer les deux droites asymptotes et enfin de tracer un arc d'hyperbole qui se rapporche des deux asymptotes, tout en restant au dessus de l'asymptote horizontale. Les questions précdentes avaient justement pour but de nous faire rassembler toutes ces informations. Le tracer donne la courbe ci dessous :



2 Exercice 2

1) Développer $(a+b)^3$ et $(a+b)^4$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3\\ &= (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\\ &= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

Conclusion

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

2) On considère la suite (S_n) définie pour tout $n \geq 1$ par

$$S_n = 1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3$$

S_n est donc la somme des cubes des entiers impairs jusqu'à $2n-1$.

2 a) Calculer S_1, S_2 et S_3

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1^3 = 1 \\
S_2 &= 1^3 + 3^3 = 1 + 27 = 28 \\
S_3 &= 1^3 + 3^3 + 5^3 = 28 + 125 = 153
\end{aligned}$$

Conclusion

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = 28 \qquad S_3 = 153$$

2b) Prouver par récurrence que :

$$S_n = 2n^4 - n^2 \qquad \forall n \geq 1$$

Pour $n = 1$, on a, d'une part

$$S_1 = 1$$

et d'autre part

$$2n^4 - n^2 = 2 \times 1^4 - 1^2 = 2 - 1 = 1$$

Donc pour $n = 1$ la formule $2n^4 - n^2$donne bien la valeur de S_1.

Supposons, la propriété vraie au rang n c'est-à-dire

$$S_n = 2n^4 - n^2$$

Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que

$$S_{n+1} = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$$

qui après développement donne

$$S_{n+1} = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1$$

Calculons donc S_{n+1}

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 1^3 + 3^3 + \cdots (2(n+1) - 1)^3 \\
&= S_n + (2n+1)^3 \\
&= 2n^4 - n^2 + (2n+1)^3 \quad \text{(d'apres l'hypothese de reccurence)} \\
&= 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \\
&= 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1
\end{aligned}$$

C'est bien l'expression attendue, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion

$$\forall n \geq 1 \qquad S_n = 2n^4 - n^2$$

Remarque : On peut pousser le calcul de S_{n+1} jusqu'à retrouver l'expression attendue.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + (2(n+1)-1)^3 = S_n + (2n+1)^3 \\
&= 2n^4 - n^2 + (2n+1)^3 \quad (\mathrm{d'apres\ l'hypothese\ de\ reccurence}) \\
&= 2n^4 - n^2 + (n+1+n)^3 \\
&= 2n^4 - n^2 + (n+1)^3 + 3(n+1)^2 n + 3(n+1)n^2 + n^3 \\
&= (n+1)^3 + 3n(n+1)^2 + 2n^4 - n^2 + 3n^3 + 3n^2 + n^3 \\
&= (n+1)^3 + 3n(n+1)^2 + 2n^4 + 4n^3 + 2n^2 \\
&= (n+1)^3 + 3n(n+1)^2 + 2n^2(n^2+2n+1) \\
&= (n+1)^3 + 3n(n+1)^2 + 2n^2(n+1)^2 \\
&= (n+1)^2\left[(n+1) + 3n + 2n^2\right] \\
&= (n+1)^2\left[2n^2 + 4n + 1\right] \\
&= (n+1)^2\left[2n^2 + 4n + 2 - 1\right] \\
&= (n+1)^2\left[2(n+1)^2 - 1\right] \\
&= 2(n+1)^4 - (n+1)^2
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$S_n = 2n^4 - n^2 \qquad \text{et} \qquad S_{n+1} = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$$

3 Exercice 3

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{3x^2 - 5\cos x}{x^2 + 7}$$

a) Démontrer que, pour tout réel x

$$\frac{3x^2-5}{x^2+7} \leq g(x) \leq \frac{3x^2+5}{x^2+7}$$

La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ et toutes ses valeurs sont comprises entre -1 et 1. Donc, pour tout x, on a

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-5 \leq -5\cos x \leq 5$$

$$3x^2 - 5 \leq 3x^2 - 5\cos x \leq 3x^2 + 5$$

$x^2 + 7$ étant toujours positif

$$\frac{3x^2-5}{x^2+7} \leq \frac{3x^2-5\cos x}{x^2+7} \leq \frac{3x^2+5}{x^2+7}$$

Conclusion

$$\frac{3x^2-5}{x^2+7} \leq g(x) \leq \frac{3x^2+5}{x^2+7}$$

b) En déduire la limite de $g(x)$ en $-\infty$.

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-5}{x^2+7} \leq \lim_{x\to-\infty} g(x) \leq \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+5}{x^2+7}$$

Il suffit donc de trouver les limites des deux fractions rationnelles encadrantes. Or à l'infini, une fraction rationnelle se comporte comme le quotient des termes de plus haut degrés

$$\frac{3x^2}{x^2} = 3$$

dont la limite est évidement 3.

Conclusion :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 3$$

4 Exercice 4

Etudier les limites suivantes :

a)

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 + 7x^2 - 8x - 11$$

La limite d'un polynome est la même que la limite du terme de plus haut degré, c'est-à-dire x^3. En $-\infty$ la limite est $-\infty$.

Conclusion

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 + 7x^2 - 8x - 11 = -\infty$$

Note : sinon on fait à la mode Delian en mettant x^3 en facteur.

b)

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{2x-3}\right)$$

On a une fonction composée, une fonction homographique, suivie de la fonction sinus

$$x \longrightarrow \frac{\pi x}{2x-3} \longrightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{2x-3}\right)$$

On va donc utiliser les théorêmes connus sur la limite d'une fonction composée. Pour la fraction rationnelle la limite, correspond à la limite du quotient des termes de plus haut degé.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi x}{2x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\pi x}{2x} = \frac{\pi}{2}$$

Pour la fonction composée, nous avons

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{2x-3}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Conclusion

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{2x-3}\right) = 1$$

c)

$$\lim_{x \to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x+9}-4}$$

En 7, la limite du numérateur est 0. Celle du dénominateur est également 0. ($\sqrt{7+9} - 4 = 4 - 4 = 0$). On a donc une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$. Nous devons donc lever l'indétermination. Utilisons l'expression conjuguée (a retenir pour les expressions avec des radicaux).

$$\frac{x-7}{\sqrt{x+9}-4} = \frac{(x-7)(\sqrt{x+9}+4)}{(\sqrt{x+9}-4)(\sqrt{x+9}+4)} = \frac{(x-7)(\sqrt{x+9}+4)}{x+9-16} = \frac{(x-7)(\sqrt{x+9}+4}{x-7}$$

Donc pour tout $x \neq 7$

$$\frac{x-7}{\sqrt{x+9}-4} = \sqrt{x+9} + 4$$

On en déduit immédiatement la limite

$$\lim_{x\to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x+9}-4} = \lim_{x\to 7} \sqrt{x+9}+4 = 8$$

Conclusion

$$\lim_{x\to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x+9}-4} = 8$$