TS4 Devoir Maison 1 Le 09/09/2016

Nom : .... à rendre le 16/09/2016

Exercice 1 On note S_n la somme des entiers de 1 à n, et T_n la somme des cubes des entiers de 1 à n :

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n \quad \text{et} \quad T_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

1.a) Calculer les termes des suites (S_n) et (T_n) pour les valeurs $n = 1{,}2.3$ et 4.

b) À partir des résultats précédents, conjecturer une relation entre S_n et T_n.

On veut à présent démontrer la conjecture émise à la question précédente.

2.a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$T_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

c) Que peut-on en conclure ?

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

1.a) Calculer les valeurs **exactes** de u_1, u_2, u_3 et u_4.

b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

On considère à présent la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - 3.$$

2. Montrer que $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$-1 \leqslant v_n \leqslant 0.$$

4. Démontrer que :

$$v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right).$$

5. En déduire le sens de variation de la suite (v_n). Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?