Corrigé DM1 - TS4

10/09/2016

1 Exercice 1

1 a) Calculons les premiers termes de S_n et T_n. On remarque que

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) \qquad \text{et} \qquad T_{n+1} = T_n + (n+1)^3$$

$$\begin{aligned} &S_1 = 1 \\ &S_2 = 1 + 2 = 3 \\ &S_3 = 1 + 2 + 3 = 3 + 3 = 6 \\ &S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 6 + 4 = 10 \end{aligned}$$

De mème pour T_n

$$\begin{aligned} &T_1 = 1^3 = 1 \\ &T_2 = 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 \\ &T_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 9 + 27 = 36 \\ &T_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 36 + 64 = 100 \end{aligned}$$

Conclusion

$$S_1 = 1 \quad S_2 = 3 \quad S_3 = 6 \quad S_4 = 10 \qquad T_1 = 1 \quad T_2 = 9 \quad T_3 = 27 \quad T_4 = 100$$

1 b) On remarque que

$$\begin{array}{ll} 1^2 = 1 & S_1^2 = T_1 \\ 3^2 = 9 & S_2^2 = T_2 \\ 6^2 = 36 & S_3^2 = T_3 \\ 10^2 = 100 & S_4^2 = T_4 \end{array}$$

On conjecture que

$$S_n^2 = T_n$$

2) On se propose de démontre la conjecture

2 a) Montrons par récurrence que

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \geq 1$$

Pour $n = 1$ on a $S_1 = 1$.

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \times (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Le relation est donc bien vérifiée pour $n = 1$ rMontrons l'hérédité. Suppons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire, supposons que

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Montrons quelle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

La propriété est donc bien vérifié au rang $n+1$.

Conclusion

$$\forall n \geq 1 \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2 b) Montrons par récurrence que

$$T_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \forall n \geq 1$$

Pour $n = 1$ on a, d'une part

$$T_1 = 1$$

d'autre part

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1^1 \times (1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

La relation est donc bien vérifiée pour $n = 1$

Montrons l'hérédité. Suppons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire, supposons que

$$T_n = \frac{n^2(n+1)^2}{2}$$

Montrons quelle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= T_n + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

La relation proposée est donc bien vérifiée au rang $n+1$.

Conclusion

$$\forall n \geq 1 \qquad T_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2 c)

$$S_n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = T_n$$

Ce qui démontre la conjecture faite au 1 b)

Conclusion

$$\forall n \geq 1 S_n^2 = T_n$$

2 Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$$

1 a) Calculer les valeurs u_1, u_2, u_3, u_4

$$u_1 = -\frac{1}{2}2^2 + 3 \times 2 - \frac{3}{2} = -2 + 6 - \frac{3}{2} = \frac{8}{2} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$
$$u_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\frac{25}{4} + \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-25+60-12}{8} = \frac{23}{8}$$
$$u_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{23}{8}\right)^2 + 3\frac{23}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\frac{529}{64} + \frac{69}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{529}{128} + \frac{69 \times 16}{128} - \frac{3 \times 64}{128} = \frac{-529+1104-192}{128} = \frac{383}{128}$$
$$u_4 = -\frac{1}{2}\left(\frac{383}{128}\right)^2 + 3\frac{383}{128} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\frac{146689}{16384} + 3\frac{383}{128} - \frac{3}{2} = -\frac{146689}{32768} + \frac{294144}{32768} - \frac{49152}{32768} = \frac{98303}{32768}$$

1 b) Calculons les valeurs approchées des premiers termes de la suite et comparons les valeurs

$$u_0 = 2 \quad u_1 = 2,5 \quad u_2 = 2,875 \quad u_3 \simeq 2,992 \quad u_4 \simeq 2,999$$

On a donc

$$u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$$

Au vu du comportement des premiers termes, il semble que la suite soit croissante. Nous pouvons donc émettre la conjecture suivante : « (u_n) est une suite croissante ».

2) On considère la suite $v_n = u_n - 3$. Montrons que $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\
&= -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 \\
&= -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} \\
&= -\frac{1}{2}(u_n^2 - 6u_n + 9) \\
&= -\frac{1}{2}(u_n - 3)^2 \\
&= -\frac{1}{2}v_n
\end{aligned}$$

Conclusion

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$$

3) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$-1 \leq v_n \leq 0$$

Initialisation : $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$. Donc $-1 \leq v_0 \leq 0$.

Hérédité. Suppons que $-1 \leq v_n \leq 0$. On doit montrer que $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$. Donc d'après notre hypothèse.

$$-1 \leq v_0 \leq 0$$

En élevant au carré, on obtient

$$1 \geq v_n^2 \geq 0$$

En multipliant par $-\frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}v_n^2 \leq 0$$

Donc

$$-1 \leq v_{n+1} \leq 0$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad -1 \leq v_n \leq 0$$

4)

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n \\ &= -v_n\left(-\frac{1}{2}v_n + 1\right) \end{aligned}$$

Conclusion

$$v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$$

5) D'après la question 3), on sait que v_n est négatif, donc $-v_n$ est positif. D'autre part,

$$-1 \leq v_n \leq 0$$

donc

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n \leq 0$$

$$-\frac{1}{2} + 1 \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 0 + 1$$

et donc

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1$$

ce qui montre que

$$\frac{1}{2}v_n + 1 \geq 0$$

On en déduit que

$$v_{n+1} - v_n \geq 0$$

Autrement dit

$$v_{n+1} \geq v_n$$

Conclusion : (v_n) est une suite croissante.

$$u_n = v_n + 3$$

Calculons

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (v_{n+1} + 3) - (v_n + 3) \\ &= v_{n+1} + 3 - v_n - 3 \\ &= v_{n+1} - v_n \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n$ est positif, donc $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n, ce qui permet d'affirmer que la suite (u_n) est croissante.