TS2 Devoir à la maison pour le 08 octobre

Exercice 1

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = -4$

et $u_{n+1} = 1{,}5u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1)a) Tracer, dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm) la droite (d) d'équation $y = 1{,}5x + 3$ et la droite Δ, d'équation $y = x$.

(*on graduera les deux axes de* -9 *jusqu'à* 9)

b) Sur l'axe des abscisses, placer le point P_0 d'abscisse u_0.

Utiliser les droites (d) et Δ pour représenter sur l'axe des abscisses les points P_1, P_2, P_3 et P_4 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4 (sans calculer u_1, u_2, u_3 et u_4).

c) Emettre une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

2) La suite (c_n) est définie par :

$c_n = u_n + 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que la suite (c_n) est géométrique.

Préciser sa raison et son premier terme c_0.

b) Exprimer c_n en fonction de n,

puis u_n en fonction de n.

c) Etudier la convergence de la suite (u_n).

3) a) Ecrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier n tel que : $u_n > \mathrm{A}$

où A est un réel choisi par l'utilisateur.

b) Programmer cet algorithme sur calculatrice, puis déterminer le plus petit entier n tel que :

$u_n > 10\,000$.

Exercice 2

La suite (x_n) est définie par :

$x_0 = 7$

et $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$1 \leqslant x_n \leqslant 7$

b) Prouver par récurrence que la suite (x_n) est décroissante.

c) Démontrer que la suite (x_n) converge.

d) Déterminer la limite de la suite (x_n).

Exercice 3

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 2$ et

$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) On considère l'algorithme suivant :

```
Saisir N
Affecter à U la valeur 2
Pour K allant de 0 à N−1
Affecter à U la valeur 2/3 U + 1/3 K + 1
Fin pour
Afficher U
```

a) Faire fonctionner l'algorithme avec N = 3.

On réalisera un tableau indiquant les valeurs des variables U *et* K *à chaque étape de l'exécution de l'algorithme, avec une précision de* 0,01 *pour les valeurs de* U.

b) Quel est l'affichage en sortie ?

2)a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_n \leqslant n + 3$

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$

c) Prouver que la suite (u_n) est croissante.

3) La suite (v_n) est définie par :

$v_n = u_n - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) Exprimer v_n en fonction de n,

puis u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de la suite (T_n).