Devoir à la maison pour le 7 novembre

La fonction f est définie sur $D =]-2\ ;2[\cup]2\ ;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^3+4x^2}{x^2-4}$$

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x^3-12x-32$$

1) Etudier la limite de g en $+\infty$.
2) Etudier le sens de variation de g.
Dresser son tableau de variations.
3) Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que :
$g(\alpha)=0$

4) Prouver que : $4<\alpha<5$.
5) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
On pourra appliquer la méthode d'encadrement par balayage.

6) On considère l'algorithme suivant :

Initialisation :	Affecter à X la valeur 4
	Affecter à Y la valeur $X^3-4X-12$
Traitement :	Tant que $Y<0$
	Affecter à X la valeur $X+0,1$
	Affecter à Y la valeur $X^3-4X-12$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $X-0,1$ et X

a) Que fait cet algorithme ? Quelles sorties obtient-on ?
b) Modifier l'algorithme pour qu'il affiche le résultat de la question 5).
6) Etudier le signe de la fonction g.
On commencera par tracer à nouveau le tableau de variations de g, en y faisant figurer α sur la première ligne et l'image de α sur la ligne de g.

Partie B : Etude de la fonction *f*

La courbe $\mathscr{C}$ représente la fonction f dans un repère orthonormal (unités graphiques : 1 *cm* en abscisses, 0,5 *cm* en ordonnées).

1)a) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Pour l'étude des limites $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x^2-4$; $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x^2-4$; $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x^2-4$

on pourra tracer au préalable le tableau de signe du trinôme x^2-4.

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes verticales dont on précisera les équations.

2)a) Montrer que, pour tout $x\in D$,

$$f'(x)=\frac{xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3) Déterminer une équation de la droite T, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4.

4) Tracer la droite T, la courbe $\mathscr{C}$ et ses asymptotes verticales.