PARTIE I

1) Soit y une solution de l'équation différentielle $y''(x) + \varphi(x)y(x) = 0$

φ étant de classe C^∞, une solution de classe C^n admet une dérivé d'ordre $(n+2)$ et est donct de classe C^{n+1}. On a donc une propriété immédiatement héréditaire et donc les solutions sont C^∞.

2) Montrons que, si y est solution de (E) sur I alors $x \longrightarrow y(-x)$ est également solution.

$$\forall x \in I \qquad -x \in I$$

Car l'intervalle I est symétrique, par rapport à l'origine. Si y est solution alors

$$\forall x \in I \qquad y''(x) + \varphi(x)y(x) = 0$$

C'est donc vrai aussi pour $-x$, et donc

$$y''(-x)\varphi(-x)y(-x) = 0$$

La fonction φ étant paire, il vient

$$\forall x \in I \qquad y''(-x) + \varphi(x)y(-x) = 0$$

Conclusion ; la fonction $x \longrightarrow y(-x)$ est également solution.

3) f_0 est solution et $f_0(0) = 1$ et $f_0'(0) = 0$. Soit $f(x) = f_0(-x)$. f est également solution.

$$f(x) = f_0(-x) \qquad f'(x) = -f_0(-x) \qquad f''(x) = f_0(-x)$$

f vérifie les conditions initiales suivantes

$$f(0) = f_0(-0) = f_0(0) = 1 \qquad f'(0) = -f_0'(-0) = -f_0'(0) = 0$$

Autrement dit f est solution et vérifie les mêmes conditions initiales que f_0. Le théorème de Cauchy nous dit qu'il y a unicité de la solution donc $f = f_0$, ce qui sécrit $\forall x \in I \quad f_0(-x) = f_0(x)$. f_0 est donc paire.

f_1 est solution et $f_1(0) = 0$ et $f_1'(0) = 1$. Soit $f(x) = f_1(-x)$. f est également solution.

$$f(x) = f_1(-x) \qquad f'(x) = -f_1(-x) \qquad f''(x) = f_1(-x)$$

f vérifie les conditions initiales suivantes :

$$f(0) = f_1(-0) = f_1(0) = 0 \qquad f'(0) = -f_1'(-0) = -f_1'(0) = -1$$

Autrement dit $-f$ est solution est vérifie les mêmes conditions initiales que f_1. Le théorème de Cauchy nous dit qu'il y a unicité de la solution donc $-f = f_1$, ce qui sécrit $\forall x \in I \quad -f_1(-x) = f_1(x)$. f_0 est donc impaire.

La solution générale s'écrit

$$y(x) = \lambda f_0(x) + \mu f_1(x)$$

En effet, f_0 et f_1 étant solution. La fonction $y\lambda f_0 + \mu f_1$ est également une solution. On a $y' = \lambda f_0' + \mu f_1'$. C'est donc une solution vérifiant les conditions initiales

$$y(0) = \lambda f_0(0) + \mu f_1(0) = \lambda \qquad y'(0) = \lambda f_0'(0) + \mu f_1'(0) = \mu$$

et c'est la seule...

Soit y une solution paire. Elle vérifie $y(0)=\lambda$ et $y'(0)=0$ et c'est la seule solution vérifiant ces conditions. Or λf_0 est également une solution vérifiant ces conditions donc $y=\lambda f_0$. On raisonne de même pour une solution impaire, qui vérifiera des conditions de la forme $y(0)=0$ et $y'(0)=\mu$.

4) On suppose que f_0 ne s'annulle pas. On pose $u=\dfrac{f_1}{f_0}$

4.1) Montrons que u' ne s'annule pas. Nous avons

$$u'=\frac{f_0f_1'-f_0'f_1}{f_0^2}$$

Considérons la quantité

$$W=f_0f_1'-f_0'f_1$$

$$W'=f_0'f_1'+f_0f_1''-f_0''f_1-f_0'f_1'=f_0f_1''-f_0''f_1=f_0(-\varphi f_1)-(-\varphi f_0)f_1=-\varphi f_0f_1+\varphi f_0f_1=0$$

Autrement dit W est constante.

$$\forall x\in I\quad W(x)=W(0)=f_0(0)f_1'(0)-f_0'(0)f_1(0)=1$$

Donc u' ne s'annule pas.

4.2) Nous en déduisons de plus : $f_0f_1''-f_0''f_1=0$. Calculons maintenant u''

$$\begin{aligned}u''&=\frac{f_1''f_0+f_1'f_0'-f_1'f_0'-f_1f_0'')f_0^2-2f_0f_0'(f_1'f_0-f_1f_0')}{f_0^4}\\&=\frac{(f_0f_1''-f_0''f_1)f_0^2-2f_0f_0'(f_1'f_0-f_1f_0')}{f_0^4}\\&=\frac{2f_0f_0'}{f_0^2}\frac{(f_1'f_0-f_1f_0')}{f_0^2}\\&=-\frac{2f_0'}{f_0}u'\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\frac{u''}{u'}=-2\frac{f_0'}{f_0}$$

On en déduit

$$(\ln u')'=-2(\ln f_0)'\implies \ln u'=\ln\frac{1}{f_0^2}+K=\ln\frac{1}{f_0^2}+\ln B=\ln\frac{B}{f_0^2}$$

ou $K\in\mathbb{R}$ et $B\in\mathbb{R}$ avec $\ln B=K$. Or

$$u'(0)=\frac{1}{f_0(0)^2}=1\implies B=1$$

Conclusion

$$u'=\frac{1}{f_0^2}$$

4.3) Calculons f_1. u est une primitive de $\dfrac{1}{f_0^2}$ donc

$$u(x)=u_0(x)+K\qquad K\in\mathbb{R}$$

donc, nous avons

$$\forall x\in\mathbb{I}\qquad f_1(x)=u(x)f_0(x)=(u_0(x)+K)f_0(x)$$

Pour $x = 0$, il vient

$$f_1(0) = 0 = (u_0(0) + K)f_0(0) = (0 + K) \times 1 = K$$

et donc $K = 0$, ce qui permet de conclure

$$f_1 = u_0 f_0^2$$

5) I est l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et on suppose que la fonction $y(x) = \cos^2 x$ est solution.

5.1) Traduisons que $\cos^2 x$ et solution.

$$y(x) = \cos^2 x$$
$$y'(x) = -2\cos x \sin x$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= -2(-\sin x)\sin x - 2\cos x \cos x \\ &= 2\sin^2 x - 2\cos^2 x \\ &= 2(1 - \cos^2 x) - 2\cos^2 x \\ &= 2(1 - 2\cos^2 x) \end{aligned}$$

Il vient

$$y''(x) = 2 - 4\cos^2 x = \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 4\right)\cos^2 x$$

et finalement

$$y''(x) + \left(4 - \frac{2}{\cos^2 x}\right) y(x) = 0$$

d'ou

$$\varphi(x) = 4 - \frac{2}{\cos^2 x} \qquad f_0(x) = \cos^2 x$$

On a en effet $\cos^2 0 = 1$ et $(\cos^2)'(0) = 0$

5.2) Calculons u_0. Nous cherchons donc la primitive de $\frac{1}{f_0^2}$. Nous avons les identités bien connues

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

donc

$$\frac{1}{\cos^4 x} = (1 + \tan^2 x)^2 = (1 + \tan^2 x)\tan'(x) = \tan'(x) + 2\tan^2 x \tan' x = \tan' x + \frac{1}{3}(\tan^3 x)'$$

Nous en déduisons une

$$u_0(x) = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + K$$

or $u_0(0) = 0$ donc $K = 0$. Et nous pouvons conclure

$$u_0(x) = \tan x + \frac{1}{3}\tan^2 x$$

5.3) Nous en déduisons $f_1 = u_0 f_0$

$$f_1(x) = \left(\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x\right)\cos^2 x = \sin x \cos x + \frac{\sin^3 x}{3\cos x}$$

PARTIE II

1) On suppose maintenant que φ est 2π périodique. Montrons que $x \longrightarrow y(x+2\pi)$ est solution de (E). Posons $u(x) = y(x+2\pi)$. Nous avons $u'(x) = y'(x+2\pi)$ et $u''(x) = y''(x+2\pi)$.

$$u''(x) + \varphi(x)u(x) = y''(x+2\pi)\varphi(x) + y(x+2\pi) = y''(x+2\pi)\varphi(x+2\pi) + y(x+2\pi)$$

Or y est solution donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y''(x) + \varphi(x)y(x) = 0$$

or pour tout x réel, $x+2\pi$ est r'eel et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y''(x+2\pi) + \varphi(x+2\pi)y(x+2\pi) = 0$$

Autrement dit,

$$u''(x) + \varphi(x)u(x) = 0$$

Conclusion : la fonction $x \longrightarrow y(x+2\pi)$ est solution.

2) Montrons qu'il existe des constantes réelles $w_{00}, w_{01}, w_{10}, w_{11}$ telles que :

$$f_0(x+2\pi) = w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x)$$
$$f_1(x+2\pi) = w_{01}f_0(x) + w_{11}f_1(x)$$

f_0 et f_1 sont solutions, donc les fonctions $f_0(x+2\pi)$ et $f_1(x+2\pi)$ sont aussi solution d'après la question précédentes. Ces fonctions écrivent comme combinaisons linéaires de f_0 et f_1. Donc il existe quatres réels tels que :

$$f_0(x+2\pi) = w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x)$$
$$f_1(x+2\pi) = w_{01}f_0(x) + w_{11}f_1(x)$$

Ces constantes s'expriment aisément. Pour $x = 0$ il vient :

$$f_0(2\pi) = w_{00}f_0(0) \qquad f_1(2\pi) = w_{11}f_1(0)$$

Dérivons les deux expressions, il vient

$$f_0'(x+2\pi) = w_{00}f_0'(x) + w_{10}f_1'(x)$$
$$f_1'(x+2\pi) = w_{01}f_0'(x) + w_{11}f_1'(x)$$

et pour $x = 0$

$$f_0'(2\pi) = w_{10}f_1'(0) \qquad f_1'(2\pi) = w_{01}f_0'(0)$$

Conclusion : il existe quatre constantes réelles $w_{00}, w_{01}, w_{10}, w_{11}$ telles que :

$$f_0(x+2\pi) = w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x)$$
$$f_1(x+2\pi) = w_{01}f_0(x) + w_{11}f_1(x)$$

On

$$w_{00} = \frac{f_0(2\pi)}{f_0(0)} \qquad w_{01} = \frac{f_1'(2\pi)}{f_0'(0)} \qquad w_{10} = \frac{f_0'(2\pi)}{f_1'(0)} \qquad w_{11} = \frac{f_1(2\pi)}{f_1(0)}$$

3) Soit la matrice

$$W = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{pmatrix}$$

Montrons que 1 est valeur propre si et seulement si l'équation (E) admet des solutions 2π périodique. Soit g une telle solution, g s'ecrit comme combinaison linéaire de f_0 et f_1 et pour tout x réel $g(x) = g(x+2\pi)$. Ce s'écrit

$$g(x) = \lambda f_0(x) + \mu f_1(x) \quad (1) \qquad g(x+2\pi) = \lambda f_0(x+2\pi) + \mu f_1(x+2\pi) \quad (2)$$

La deuxième égalité se transforme en

$$\begin{aligned} g(x) &= \lambda(w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x)) + \mu(w_{01}f_0(x) + w_{11}f_1(x)) \\ &= (\lambda w_{00} + \mu w_{01})f_0(x) + (\lambda w_{10} + \mu w_{11})f_1(x) \end{aligned}$$

Donc

$$g(x) = \lambda f_0(x) + \mu f_1(x) = (\lambda w_{00} + \mu w_{01})f_0(x) + (\lambda w_{10} + \mu w_{11})f_1(x)$$

L'égalité étant vraie pour tout x réel, nous avons

$$\begin{aligned} \lambda w_{00} + \mu w_{01} &= \lambda \\ \lambda w_{10} + \mu w_{11} &= \mu \end{aligned}$$

Le couple (λ, μ) solution du système est un vecteur propre de la matrice W associé à la valeur propre 1. Donc si g est une solution 2π périodique, 1 est valeur propre de W. Réciproquement, si 1 est valeur propre, il existe un vecteur propre non nul (λ, μ) associé à la valeur propre 1. Les calculs précédent montre qu'on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x + 2\pi) = g(x)$$

4) Montrons que si (E) admet sur $\mathbb{R}$ des solutions non indentiquement nules $2\pi-$périodique alors l'une au moins des deux fonctions f_0 et f_1 est $2pi-$périodique. Considérons les fonctions

$$p(x) = g(x) + g(-x) \qquad i(x) = g(x) - g(-x)$$

On a

$$p(-x) = g(-x)+g(-(-x)) = g(x)+g(-x) = p(x) \qquad i(-x) = g(-x)-g(-(-x)) = -(g(x)-g(-x)) = -i(x)$$

Donc p est une fonction paire et i une fonction impaire. g étant 2π périodique, p et i le sont également. Donc

$$p = \lambda f_0 \qquad i = \mu f_1$$

Si g n'est ni paire ni impaire, p et i sont non nulles et donc f_0 et f_1 sont $2\pi-$périodiques. Si g est paire, $i = 0$, nous ne pouvons rien dire sur f_1 mais f_0 est $2\pi-$périodique. Si g est impaire, $p = 0$, nous ne pouvons rien dire sur f_0, mais f_1 est $2\pi-$périodique.

Conclusion : l'une au moins des fonctions f_0 ou f_1 est $2\pi-$périodique. **5)** On étudie le cas particulier ou

$$\varphi(x) = a - k^2 \sin^2 x \qquad a \in \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{R}$$

a et k sont tels que la solution f_0 est $2\pi-$périodique. On pose

$$K(x,t) = e^{k \cos t \cos x} \qquad\qquad F(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{k \cos t \cos x} f_0(t)\mathrm{d}t$$

5.1) Calculons $F(-x)$

$$F(-x) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{k \cos t \cos(-x)} f_0(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{k \cos t \cos x} f_0(t)\mathrm{d}t = F(x)$$

La fonction F est donc paire.

F est de classe C^2 du fait que $e^{k \cos t \cos x} f_0(t)$ est C^∞ de même que ses dérivée partielle par rapport à x première et seconde. On a alors

$$F'(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial}{\partial}(e^{k \cos t \cos x}) f_0(t)\mathrm{d}t$$

A COMPLETER avec une etude en bonne et due forme de la derivabilite 1 fois puis 2 fois...

5.2) Calculons les dérivées partielles seconde.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial x}(x,t) &= e^{k\cos t\cos x}(k\cos t(-\sin x)) = e^{k\cos t\cos x}(-k\cos t\sin x)\\
\frac{\partial K}{\partial x}(x,t) &= K(x,t)(-k\cos t\sin x)\\
\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial K}{\partial x}(x,t)(-k\cos t\sin x) + K(x,t)(-k\cos t\cos x)\\
&= K(x,t)(-k\cos t\sin x)(-k\cos t\sin x) + K(x,t)(-k\cos t\cos x)\\
\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t) &= K(x,t)k^2\cos^2 t\sin^2 x + K(x,t)(-k\cos t\cos x)\\
\frac{\partial K}{\partial t}(x,t) &= e^{k\cos t\cos x}(k(-\sin t)\cos x) = e^{k\cos t\cos x}(-k\sin t\cos x)\\
\frac{\partial K}{\partial t}(x,t) &= K(x,t)(-k\sin t\cos x)\\
\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial K}{\partial t}(-k\sin t\cos x) + K(x,t)(-k\cos t\cos x)\\
&= K(x,t)(-k\sin t\cos x)(-k\sin t\cos x) + K(x,t)(-k\cos t\cos x)\\
\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t) &= K(x,t)k^2\sin^2 t\cos^2 x + K(x,t)(-k\cos t\cos x)
\end{aligned}$$

Reprenons l'expression des dérivées partielles seconde et remplaçons les cosinus carré par 1 moins sinus carré. Il vient

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = K(x,t)k^2(1-\sin^2 t)\sin^2 x + K(x,t)\cos t\cos x$$

donc

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - K(x,t)k^2\sin^2 x = -K(x,t)(\sin^2 t\sin^2 x + k\cos t\cos x)$$

De même

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t) = K(x,t)k^2\sin^2 t(1-\sin^2 x) + K(x,t)(-k\cos t\cos x)$$

donc

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t) - K(x,t)k^2\sin^2 t = K(x,t)(-k^2\sin^2 t\sin^2 - k\cos t\cos x)$$

donc

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t) - K(x,t)k^2\sin^2 x = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t) - K(x,t)k^2\sin^2 t$$

Il reste a ajouter de chaque coté de l'égalité $aK(x,t)$ et nous obtenons l'égalité cherchée.

Conclusion

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t) + (a-k^2\sin^2 x)K(x,t) = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t) + (a-k^2\sin^2 t)K(x,t)$$

Multiplions l'égalité précédente par $f_0(t)$ puis intégrons sur l'intervalle $[-\pi;+\pi]$ cette égalité. Il vient :

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}f_0(t)\mathrm{d}t + (a-k^2\sin^2 x)\int_{-\pi}^{+\pi}K(x,t)f_0(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}f_0(t)\mathrm{d}t + (a-k^2\sin^2 t)\int_{-\pi}^{+\pi}K(x,t)f_0(t)\mathrm{d}t$$

Ce qui s'écrit encore

$$F''(x) + (a-k^2\sin^2 x)F(x) = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}f_0(t)\mathrm{d}t + (a-k^2\sin^2 t)\int_{-\pi}^{+\pi}K(x,t)f_0(t)\mathrm{d}t$$