TS2 Devoir N°6

Exercice 1

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2e\sqrt{e}\frac{\ln x}{x^2}$$

1. a) Etudier la limite de la fonction f en 0.
   b) En remarquant que, pour tout réel $x > 0$

   $$f(x) = \frac{2e\sqrt{e}}{x} \times \frac{\ln x}{x}$$

   étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln x$.
   b) Calculer $\ln \sqrt{e}$.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
   d) Montrer que le maximum de f est $\sqrt{e}$.
3. Montrer que, dans l'intervalle $[1;1,5]$, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α.
4. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par :

   $$\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   a) Prouver que, pour tout entier naturel n :

   $$u_n \leq \sqrt{e}$$

   b) Démontrer par réccurence que la suite (u_n) est croissante.
   c) Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 2

1. La fonction g est définie sur $[0;+\infty[$ par :

   $$g(x) = e^{2x} - 4e^x - 5$$

   a) Etudier le sens de variation de g.
   b) Résoudre l'équation : $g(x) = 0$
   c) Etudier le signe de la fonction g.
2. La fonction h est définie sur $I = [\ln 5;+\infty[$ par :

   $$h(x) = \ln\left(e^{2x} - 4e^x - 5\right)$$

   a) Etudier la limite de la fonction h en $\ln 5$.
   b) Calculer $h'(x)$ puis déterminer le signe de $h'(x)$ en utilisant les signe de $g'(x)$ et le signe de $g(x)$. Dresser le tableau de variation de la fonct h *(que l'on complètera, après avoir trait'e les questions c) et d) en y reportant la limite de h en $+\infty$*
   c) Montrer que, pour tout $x \in I$:

   $$h(x) = 2x + \ln\left(1 - 4e^{-x} - 5e^{-2x}\right)$$

   d) Etudier la limite de la fonction h en $+\infty$