Exercice 1

1a) Etudions la limite de f en 0.

$$f(x) = 2e\sqrt{e}\frac{\ln x}{x^2} = 2e\sqrt{e}\frac{1}{x^2} \times \ln x$$

Nous avons

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0^+ \implies \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0}\ln x = -\infty$$

Conclusion

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

1b) Etudions la limite de f en $+\infty$. Nous remarquons que

$$f(x) = 2e\sqrt{e}\frac{\ln x}{x^2} = 2e\sqrt{e}\frac{1}{x}\frac{\ln x}{x}$$

Or

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Conclusion

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

2a) Calculons la fonction dérivée de f.

$$f'(x) = 2e\sqrt{e}\frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$$

Conclusion

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

Donc pour $x > 0$, nous avons $x^3 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln x$

2b) Calculons $\ln(\sqrt{e})$

$$\ln(\sqrt{e}) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$$

Conclsuion

$$\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$$

2c) Dressons le tableau de variation de f

$$1 - 2\ln x \geq 0 \iff \ln x \leq \frac{1}{2} \iff x \leq \sqrt{e}$$

Nous avons également

$$f(\sqrt{e}) = 2e\sqrt{e}\frac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}^2} = 2e\sqrt{e}\frac{\frac{1}{2}}{e} = \sqrt{e}$$

D'ou le tableau

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	0

2d) Compte-tenu du tableau de variation, la fonction présente un maximum en $\sqrt{e}$ qui est $\sqrt{e}$.

3) Montrons que dans l'intervalle $[1; 1,5]$, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α.

– La fonction f est continue (car dérivable)
– La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1;1,5]$ ($\sqrt{e} \simeq 1,65$)
– $1 \in [f(1); f(1,5)]$ En effet

$$f(1) = 2e\sqrt{e}\frac{\ln 1}{1^2} = 0$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2e\sqrt{e}\frac{\ln\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{8}{9}e\sqrt{e}\ln\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 1,615$$

Donc, d'après le corrolaire du théorème des valeurs intermédiares, il existe une unique valeur α appartenant à l'intervalle $[1;1,5]$ telle que $f(\alpha) = 1$

4) On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{3}{2} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

4a) Montrons que pour tout n on a $u_n \leq \sqrt{e}$. Raisonons par réccurence.

$$n = 0 \quad u_0 = \frac{3}{2} \leq \sqrt{e} \qquad (u_0 = 1,5 \qquad \sqrt{e} \simeq 1,654)$$

Supposons que $u_n \leq \sqrt{e}$. Montrons que $u_{n+1} \leq \sqrt{e}$.

Par hypothèse

$$u_n \leq \sqrt{e}$$

f est croissante donc

$$f(u_n) \leq f(\sqrt{e}$$

et donc

$$u_{n+1} \leq \sqrt{e}$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq \sqrt{e}$$

4b) Montrons par réccurence que la suite (u_n) est croissante, c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq u_{n+1}$$

Nous avons

$$u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{9}e\sqrt{e}\ln\left(\frac{3}{2}\right) > \frac{3}{2} \qquad u_1 > u_0$$

Supposons que $u_n \leq u_{n+1}$, montrons que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Par hypothèse, nous avons

$$u_n \leq u_{n+1}$$

Or

$$u_n \leq \sqrt{e}$$

donc f est croissante et donc

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1})$$

d'ou

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

Conclusion : la suite (u_n) est croissante

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq u_{n+1}$$

4c) La suite (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{e}$ donc (u_n) est convergente (car tout suite croissante majorée est convergente.

Exercice 2

1) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^{2x} - 4e^x - 5$$

1a) Etudions le sens de variation de g.

$$g'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2e^2(e^x - 2)$$

$g'(x)$ est du signe de $e^x - 2$

$$e^x - 2 \geq 0 \iff e^x \geq 2 \iff x \geq \ln 2$$

Nous en déduisons le tableau de variation

x	0		$\ln 2$		$\ln 5$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		$+$		
$g(x)$	-8	$\searrow$	-9	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Justifions les valeurs indiquées dans le tableau de variaiton

$$\begin{aligned}
g(0) &= e^{2\times 0} - 4e^0 - 5 = 1 - 5 - 5 = -8 \\
g(\ln 2) &= e^{2\ln 2} - 4e^{\ln 2} - 5 = 2^2 - 4 \times 2 - 5 = 4 - 8 - 5 = -9 \\
g(x) &= e^{2x}\left(1 - \frac{4}{e^x} - \frac{5}{e^{2x}}\right) \implies \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty
\end{aligned}$$

1b) Résolvons l'équation : $g(x) = 0$. Sur $[0; \ln 2]$, $g(x) < 0$, il n'y a donc pas de solution sur cet intervalle. En revanche, le théorème des valeurs intermédiares de conclure à l'existence d'une unique solution entre $\ln 2$ et $+\infty$. Ici l'équation peut être résolue. Posons $X = e^x$. Il vient

$$\begin{aligned}
& g(x) = 0 \\
\iff & e^{2x} - 4e^x - 5 = 0 \\
\iff & X^2 - 4X - 5 = 0
\end{aligned}$$

$X = -1$ est racine évidente. L'autre racine est donc $X = 5$.

$$e^x = -1 \quad \text{impossible} \qquad e^x = 6 \iff x = \ln 5$$

Conclusion : l'ensemble des solutions est

$$S = \{\ln 5\}$$

En complétant le tableau de variation avec cette information, nous déduisons immédiatement le signe de la fonction g.

x	0		$\ln 5$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) La fonction h est définie sur $I =]\ln 5; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln\left(e^{2x} - 4e^x - 5\right)$$

2a) Etudions limilite de h en $\ln 5$. Il s'agit d'une fonction composée.

$$\lim_{x\to\ln 5} e^{2x} - 4e^x - 5 = g(\ln 5) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\ln 0} \ln x = -\infty \implies \lim_{x\to\ln 5} h(x) = -\infty$$

Conclusion

$$\lim_{x \to \ln 5} h(x) = -\infty$$

2b) Etudions les variations de h, et pour cela calculons la fonction dérivée de h. Nous avons

$$h(x) = \ln(g(x))$$

donc

$$h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2e^{2x} - 4e^{x}}{e^{2x} - 4e^{x} - 5}$$

D'après l'étude précédente, sur l'intervalle $]\ln 5; +\infty[$, nous avons

$$g(x) > 0 \qquad g'(x) > 0 \implies h'(x) > 0$$

Nous en déduisons le tableau de variation.

x	$\ln 5$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2c Transformons l'expression de $h(x)$.

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln(e^{2x} - 4e^{x} - 5) \\ &= \ln\left(e^{2x}\left(1 - 4\frac{e^{2}}{e^{2x}} - \frac{5}{e^{2x}}\right)\right) \\ &= \ln e^{2x} + \ln\left(1 - 4\frac{1}{e^{x}} - \frac{5}{e^{2x}}\right) \\ &= \ln e^{2x} + \ln\left(1 - 4e^{-x} - 5e^{-2x}\right) \end{aligned}$$

Conclusion

$$h(x) = \ln e^{2x} + \ln\left(1 - 4e^{-x} - 5e^{-2x}\right)$$

2d) En utilisant le calcul précédent, nous obtenons aisément la limite de h en $+\infty$. En effet,

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \implies \lim_{x \to +\infty} 1 - 4e^{-x} - 5e^{-2x} = 1$$

Par composition

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 - 4e^{-x} - 5e^{-2x}\right) = 0$$

Enfin,

$$\lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty \implies \lim_{x \to +\infty} 2x + \ln\left(1 - 4e^{-x} - 5e^{-2x}\right) = +\infty$$

Conclusion :

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$