Corrigé DM ? - TS5

26/11/2017

1 Exercice 1

Une urne contient :

- 1 boule rouge
- 2 boules jaunes
- 4 boules vertes

La règle du jeu est la suivante. Le joueur tire une première boule

- Si la boule est rouge il gagne 10
- Si la boule est jaune il perd 5
- Si la boule est verte il tire une nouvelle boule, gagne 8 si elle rouge perd 4 si elle est jaune

1) On suppose que les boules sont indicernable au touché et on donc toute la même probabilité d'être tirées. Il y a 7 boules dans l'urne au total (Card $U = 7$. Appelons

- R_i l'événement tirer la boule rouge au i$^{\text{eme}}$ tirage
- J_i l'événement tirer une boule jaune au i$^{\text{eme}}$ tirage
- V_i l'événement tirer une boule verte au i$^{\text{eme}}$ tirage

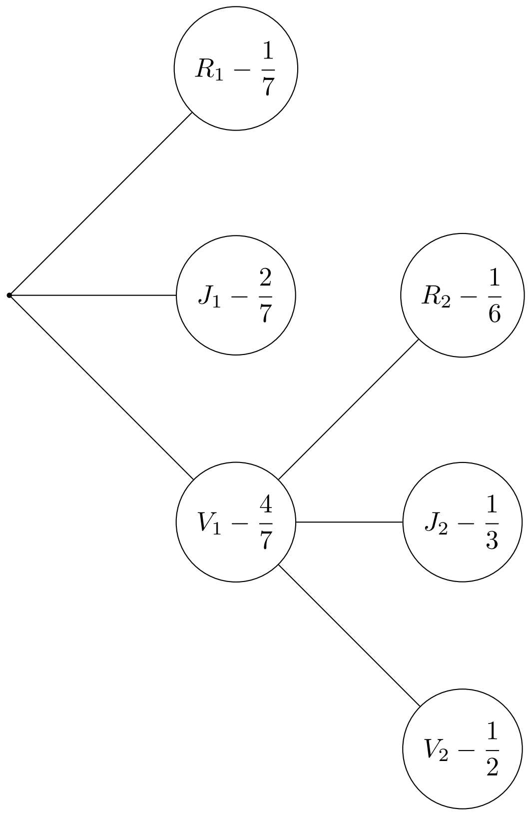
Nous avons alors

$$p(R_1) = \frac{\text{Card } R_1}{\text{Card } U} = \frac{1}{7} \qquad p(J_1) = \frac{\text{Card } J_1}{\text{Card } U} = \frac{2}{7} \qquad p(V_1) = \frac{\text{Card } V_1}{\text{Card } U} = \frac{4}{7}$$

En cas de deuxième tirage, l'urne ne contient plus que 6 boules au total et il manque une verte. Les probabilités deviennent donc

$$p(R_2) = \frac{\text{Card } R_2}{\text{Card } U} = \frac{1}{6} \qquad p(J_2) = \frac{\text{Card } J_2}{\text{Card } U} = \frac{2}{6} \qquad p(V_2) = \frac{\text{Card } V_2}{\text{Card } U} = \frac{3}{6}$$

d'ou l'arbre pondéré décrivant le jeu.



2a) On note G le gain algébrique du joueur. G est une variable aléatoire, qui prend les valeurs -5,-4,0,8 et 10.

$$p(G = 10) = p(R_1) = \frac{1}{7} \qquad p(G = -5) = p(J_1) = \frac{2}{7}$$

Si la boule verte est tirée et qu'il y a un deuxième tirage.

$$p(G = 8) = p(V_1 \cap R_2) = p(V_1)p_{V_1}(R_2) = \frac{4}{7}\frac{1}{6} = \frac{2}{21}$$
$$p(G = -4) = p(V_1 \cap (J_2 \cup V_2)) = p(V_1)p_{V_1}(J_2) + p(V_1)p_{V_1}(V_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{10}{21}$$

On en déduit la loi de probabilité de la variable aléatoire G

G_i	-5	-4	8	10
$p(G = G_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$

2b) Calculons l'espérance de G

$$\begin{aligned} E[G] &= -5 \times \frac{2}{7} - 4 \times \frac{10}{21} + 8 \times \frac{2}{21} + 10 \times \frac{1}{7} \\ &= \frac{-30 - 40 + 16 + 30}{21} \\ &= -\frac{24}{21} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{E[G] = -\frac{8}{7}}$$

Le jeu n'est donc pas équitable.

Remarque : en modifiant légèrement la règle du jeu tel que le gain soit nul en cas de tirage de la boule verte au deuxième tirage, la loi de probabilité devient

$$\begin{aligned}
p(G = 8) &= p(V_1 \cap R_2) = p(V_1)p_{V_1}(R_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{21} \\
p(G = -4) &= p(V_1 \cap J_2) = p(V_1)p_{V_1}(J_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{21} \\
p(G = \ 0) &= p(V_1 \cap V_2) = p(V_1)p_{V_1}(V_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

D'ou la nouvelle table

G_i	-5	-4	0	8	10
$p(G = G_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{7}$

Et le calcul de l'espérance mathémtatique

$$\begin{aligned}
E[G] &= -5 \times \frac{2}{7} - 4 \times \frac{4}{21} + 0 \times \frac{2}{7} + 8 \times \frac{2}{21} + 10 \times \frac{1}{7} \\
&= \frac{-30 - 16 + 0 + 16 + 30}{21} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dans ce cas, $E[G] = 0$. L'espérance de G est nulle. Le gain moyen à long terme, c'est-à-dire pour un grand nombre de parties est nul. Le jeu est équitable.

3) A l'issue d'une partie, il ne reste plus de boule rouge dans l'urne. Calculons la probabilité que le gain soit égal à 8€. Nous devons calculer une probabilité conditionnelle. La boule rouge a été tirée ; nommons R cet événement. Le gain est de 8€ ce qui correspond au gain de la partie au deuxième tirage. Nous devons donc calculer $p_R(R_2)$. La formule des probabilités conditionnelles nous donne

$$p_R(R_2) = \frac{p(R \cap R_2)}{p(R)}$$

Calculons $p(R)$. La boule rouge est tirée soit au premier tirage, soit au deuxième et les deux événements sont incompatibles

$$p(R) = p(R_1 \cup R_2) = p(R_1) + p(R_2) - p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) + p(V_1 \cap R_2) - 0 = p(R_1) + p(V_1)p_{V_1}(R_2)$$

D'ou

$$p(R) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{2}{21} = \frac{3+2}{21} = \frac{5}{21}$$

Calculons maintenant $p(R \cap R_2)$. C'est évidement $p(R_2)$ comme le bon sens nous l'indique, mais on va retrouver ce résultat intuitive en utilisant les formules du cours

$$p(R \cap R_2) = p((R_1 \cup R_2) \cap R_2) = p('R_1 \cap R_2) \cup p(R_2 \cap R_2)) = p(\emptyset \cup R_2 = p(R_2) = \frac{2}{21}$$

Nous obtenons donc

$$p_R(R_2) = \frac{p(R \cap R_2)}{p(R)} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{5}{21}} = \frac{2}{21} \cdot \frac{21}{5} = \frac{2}{5}$$

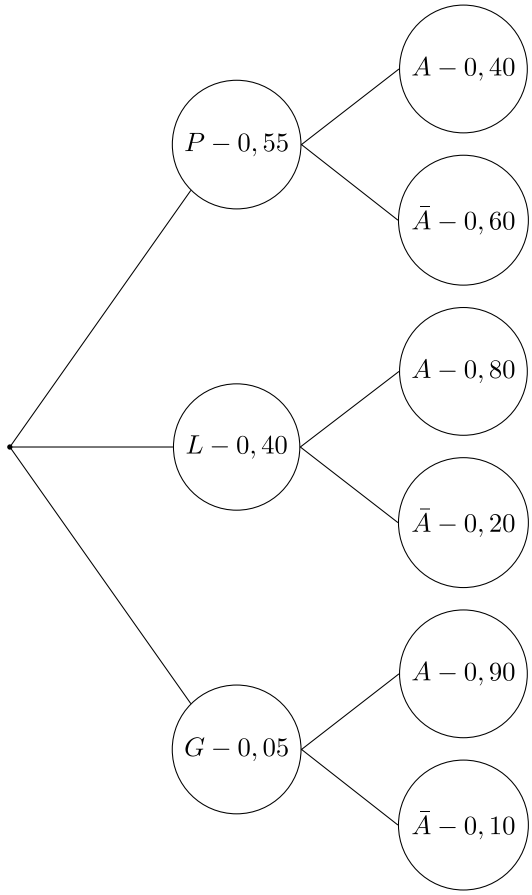
Conclusion : la probabilité de gagner 8€ alors que l'une ne contient plus la boule rouge est $\frac{2}{5}$

2 Exercice 2

1a) Les probabilités demandées sont données directement dans l'énoncé

$$p_P(\bar{A}) = 0,6 \qquad p_L(A) = 0,8 \qquad p_G(\bar{A}) = 0,1$$

1a) Voici l'arbre pondéré de la situation.



2) Calculons la probabilité de l'événement « la famille est propriétaire et habite un appartement ».

$$p(P \cap A) = p(P) \times p_P(A) = p(P) \times (1 - p_P(\bar{A}))$$

Numériquement nous obtenons

$$p(P \cap A) = 0,55 \times (1 - 0,6) = 0,55 \times 0,4 = 0,22$$

Conclusion

$$\boxed{p(P \cap A) = 0,22}$$

3) Calculons la probabilité de l'événement A, c'est-à dire la probabilité de demeurer en appartement. La répartition en propriétaires, locataires et squatteurs (et autres Tanguy) forme une partition de la population. D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} p(A) &= p(P \cap A) + p(L \cap A) + p(G \cap A) \\ &= p(P)p_P(\cap A) + p(L)P_L(A) + p(G)p_G(A) \end{aligned}$$

Donc

$$p(A) = 0,55 \times 0,4 + 0,40 \times 0,8 + 0,05 \times 0,9 = 0,585$$

Conclusion : nous avons bien $p(A) = 0,585$

4) On interroge au hasard une famille habitant un apparenant. Calculons la probabilité qu'elle soit propriétaire. Nous devons donc calculer la probabilité conditionnelle suivante : $p_A(P)$. La formule des probabilités conditionnelles nous donne

$$p_A(P) = \frac{p(A \cap P)}{p(A)}$$

Et d'après les question 2) et 3)

$$p_A(P) = \frac{0,22}{0,585} =$$

5) Les événements A et P sont-ils indépdants ? Calculons $p(A) \times p(P)$ et comparons à $p(A \cap P)$. D'une part

$$p(A) \times P(P) = 0,585 \times 0,55 = \frac{585}{1000} \times \frac{55}{100} = \frac{11}{20} = \frac{117}{200}\frac{1287}{4000} \simeq 0,322$$

D'autre part

$$p(A \cap P) = 0,22 = \frac{11}{50}$$

Donc

$$p(A \cap P) \neq p(A) \times P(P)$$

Conclusion : Les événements ne sont donc pas indépendants (ce qui intuitivement n'a rien de suprenant).

6a) On interroge au hasard 10 familles. Lors d'un tirage, la famille choisie habite soit en appartement soit en maison, on ne compte pas les sdf ni les camping caristes et autre nomades. Le tirage constitue donc une épreuve de Bernouilli. La propabilité de succès est la probabilité d'habiter en appartement $p = p(A) = 0,585$. On répète 10 fois cette épreuve. Les titages étant indépendants et la population grande chauqe tirage est effectué dans les même condition. La variable aléatoire X suit donc une loi binominales de paramétres $n = 10$ et $p = 0,585$.

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n;p) \qquad X \rightsquigarrow \mathcal{B}(10,0,585)}$$

6b) Calculons la probabilité que $X = 2$. La loi de probabilité est donnée par

$$p(X = k) = C_n^k pk(1-p)^{n-k}$$

Donc

$$\begin{aligned} p(X = 2) &= C_{10}^2 0,585^2(1-0,585)^8 \\ &= \frac{10!}{2!8!}0,585^2 \times 0,415^8 \\ &= \frac{10 \times 9}{2}0,585^2 \times 0,415^8 \\ &= 45 \times 0,585^2 \times 0,415^8 \\ &= 0,013549 \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{p(X = 2) = 0,014}$$

Pour les heureux pocesseurs d'une Ti83 (premium ou pas) utiliser Binomepdf. ou BinomFDP

6c) Calculons la proabilité qu'au moins 6 familles habitent en appartement, c'est-à-dire ($p(X \geq 6)$

$$p(X \geq 6) = 1 - p(X < 6) = 1 - p(X \leq 5) = 1 - 0,4049 = 0,595$$

Conclusion :

$$\boxed{p(X \geq 6) = 0,595}$$

Pour les heureux pocesseurs d'une Ti83 (premium ou pas) utiliser Binomecdf ou BinomeFREP