DEVOIR DE MATHEMATIQUES EN TEMPS LIBRE No3

Exercice : distances sur $\mathbb{R}$

Définition : *On appelle* **distance sur $\mathbb{R}$**, *toute application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

1) a) Montrer que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : | d(x,y) - d(y,z) | \leq d(x,z)$.

b) Quel nom peut-on donner aux inégalités $| d(x,y) - d(y,z) | \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *?*

2) a) Montrer que $d : (x,y) \mapsto | x - y |$ *définit une distance sur* $\mathbb{R}$.

b) Plus généralement, montrer que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une application strictement monotone,* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$d : (x,y) \mapsto | f(x) - f(y) |$ *définit une distance sur* $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3 : a + b \geq c \Longrightarrow \dfrac{a}{a+1} + \dfrac{b}{b+1} \geq \dfrac{c}{c+1}$.

b) En déduire que, si d est une distance sur $\mathbb{R}$, il en est de même de $d' : (x,y) \mapsto \dfrac{d(x,y)}{d(x,y)+1}$.

4) **Définition** : *Soit d, une distance sur $\mathbb{R}$.*

(i) On appelle **boule ouverte de centre** a, **de rayon** r, $(a \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+)$, *l'ensemble*
$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} / d(a,x) < r\}$.

(ii) On appelle **boule fermée de centre** a, **de rayon** r, $(a \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+)$ *l'ensemble*
$B'(a,r) = \{x \in \mathbb{R} / d(a,x) \leq r\}$.

(iii) Une partie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ est dite **ouverte pour** d *si et seulement si elle possède la propriété suivante :*
$\forall a \in \mathcal{O}, \exists\, r > 0, B(a,r) \subset \mathcal{O}$.

(iv) **Définition** : *Un partie $\mathcal{F}$ est* **fermée pour** d *si et seulement si son complémentaire est ouvert pour d.*

a) Vérifier que l'on a bien muni ainsi $\mathbb{R}$ d'une structure topologique, c'est-à-dire que :

(i) $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

(ii) $\forall\, (\mathcal{O}_i)_{i \in I}$, *famille d'ouverts de* $\mathbb{R}$: $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$.

(iii) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \cdots, \mathcal{O}_n$, *ouverts de* $\mathbb{R}$, $\bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{O}_k$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$.

b) Vérifier qu'une boule ouverte $B(a,r)$ *est un ouvert pour d.*

c) Montrer qu'une boule fermée est une partie fermée de $\mathbb{R}$ pour d.

5) **Définition** : *Deux distances d et d' sur $\mathbb{R}$ sont dites* **équivalentes** *si et seulement si :*
$\exists\, k > 0, \exists\, k' > 0, \forall\, (x,y) \in \mathbb{R} : k.d(x,y) \leq d'(x,y) \leq k'.d(x,y)$.

a) Montrer que les ouverts pour d sont les mêmes que les ouverts pour d'.

b) Donner un exemple de distances non équivalentes sur $\mathbb{R}$.

6) Définition : Soit d, une distance sur $\mathbb{R}$. On appelle **suite de Cauchy** *pour d, toute suite (u_n) de réels vérifiant la propriété suivante :*

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, (p \geq n_0, q \geq n_0) \Longrightarrow d(u_p, u_q) < \varepsilon.$

a) Montrer que, si d et d' sont deux distances équivalentes sur $\mathbb{R}$, les suites de Cauchy sont les mêmes pour d et d'.

b) Que dire de $\mathbb{R}$, muni d'une distance équivalente à la distance $d : (x, y) \mapsto |x - y|$?

Problème

L'objectif du problème est la détermination d'approximations rationnelles de nombres réels, en particulier de e, au moyen de développements en fractions continues.

Les trois premières parties sont largement indépendantes. La partie I propose la construction d'une suite de nombres rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, la partie II celle d'une suite de fonctions rationnelles convergeant vers la fonction tangente hyperbolique. La partie III introduit la notion de développement en fraction continue et la partie IV propose la recherche de tels développements en utilisant les résultats des parties précédentes.

Dans ce problème, on note (a_n), (u_n), (u_{2n}), etc., des suites de nombres réels indexées par n où n décrit l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

On peut utiliser, sans en faire la démonstration, le résultat suivant : on détermine une suite (x_n) de nombres réels et une seule par la donnée de ses deux premiers termes x_0 et x_1 et de la relation de récurrence :

$\forall n \geqslant 2, \; x_n = \alpha_n x_{n-1} + x_{n-2}$ où $(\alpha_n)_{n \geqslant 2}$ est une suite donnée de nombres réels.

I. APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$ PAR UNE SUITE DE NOMBRES RATIONNELS

A. Construction d'une suite de nombres réels convergeant vers $\sqrt{2} - 1$.

1. Vérifier que $\sqrt{2} - 1$ est solution de l'équation $x = \dfrac{1}{2 + x}$.

2. Représenter graphiquement (repère orthonormal, unité 10 cm) la fonction f définie sur le segment $[0, 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2 + x}$.

3. Vérifier qu'on définit une suite (u_n) de réels appartenant au segment $[0, 1]$ par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}.$$

En utilisant le graphique précédent, marquer, sur l'axe des abscisses, les points d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3.

4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| u_{n+1} - (\sqrt{2} - 1) \right| = \dfrac{1}{(1 + \sqrt{2})(2 + u_n)} \left| u_n - (\sqrt{2} - 1) \right|$.

En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| u_{n+1} - (\sqrt{2} - 1) \right| \leqslant \dfrac{1}{4} \left| u_n - (\sqrt{2} - 1) \right|$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| u_n - (\sqrt{2} - 1) \right| \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

Conclure.

B. **Propriétés de la suite (u_n).**

1. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est un nombre rationnel.

2. Calculer u_n pour les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 de n.

3. Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

   On pourra s'appuyer, pour démontrer ces propriétés, sur le sens de variation de f.

4. Déduire des résultats précédents un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-3} de $\sqrt{2}-1$ par des nombres rationnels, puis une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

5. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers naturels premiers entre eux et, pour $n = 0$, $p_0 = 0$, $q_0 = 1$.

   a. Déterminer p_1, q_1, p_2, q_2.

   b. Montrer que, si a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même de b et $a+2b$.

   c. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = q_n$

   $$q_{n+1} = 2\,q_n + p_n .$$

II. APPROXIMATION DE LA FONCTION TANGENTE HYPERBOLIQUE PAR UNE SUITE DE FONCTIONS RATIONNELLES

On rappelle que, pour tout réel x, $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Dans cette partie, on désigne par la même notation un polynôme et la fonction polynôme associée.

A. **Étude d'une suite de fonctions.**

1. Vérifier qu'on définit une suite de fonctions (f_n), continues sur $\mathbb{R}$, par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \operatorname{sh} x$ et la relation de récurrence $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x -2\,t f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Expliciter les fonctions f_1 et f_2.

3. Montrer que la suite (f_n) vérifie la relation :

   $$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f_n(x) = 2(2n-1) f_{n-1}(x) + 4x^2 f_{n-2}(x).$$

   On pourra, par exemple, caractériser f_n par l'expression de sa dérivée f_n' et la valeur $f_n(0)$.

4.*a.* Montrer que, si P et Q sont deux polynômes tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Q}(x)\operatorname{sh} x - \mathrm{P}(x)\operatorname{ch} x = 0$, alors les polynômes P et Q sont nuls.

   On pourra étudier le comportement de $\mathrm{Q}(x)\operatorname{sh} x - \mathrm{P}(x)\operatorname{ch} x$ quand x tend vers $+\infty$.

   b. Montrer l'existence et l'unicité de deux suites de polynômes (P_n) et (Q_n) tels que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f_n(x) = \mathrm{Q}_n(x)\operatorname{sh} x - \mathrm{P}_n(x)\operatorname{ch} x .$$

c. Déterminer P_0, Q_0, P_1, Q_1 et montrer que :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad P_n(x) = 2(2n-1)P_{n-1}(x) + 4x^2 P_{n-2}(x)$$

$$Q_n(x) = 2(2n-1)Q_{n-1}(x) + 4x^2 Q_{n-2}(x).$$

d. Montrer que les coefficients des polynômes P_n et Q_n sont des entiers naturels, que les polynômes P_n sont impairs et les polynômes Q_n pairs.

e. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n(x) \geqslant Q_n(0)$ et que $Q_n(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

B. Suite de fonctions rationnelles convergeant vers la fonction tangente hyperbolique.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\left|f_n(x)\right| \leqslant \dfrac{x^{2n}}{n!}\operatorname{sh} x$.
2. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leqslant \frac{x^{2n}}{n!} \times \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \times \frac{1}{Q_n(x)} \qquad \text{puis que} \qquad \left|\operatorname{th} x - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

3. Montrer que, pour tout réel x, la suite $\left(\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right)$ converge vers $\operatorname{th} x$ et que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$. de la même façon. n_0 est le même $\forall x$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0,\ \forall x \in [a,b],\ \forall n \geqslant n_0$

III. DÉVELOPPEMENTS EN FRACTIONS CONTINUES

Dans la suite du problème, pour tout réel x, on note $E(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

Soit α un réel positif, il s'écrit $\alpha = E(\alpha) + \omega$ où ω appartient à l'intervalle $[0, 1[$. On pose $a_0 = E(\alpha)$.

Si ω est non nul, on peut écrire $\dfrac{1}{\omega} = E\left(\dfrac{1}{\omega}\right) + \omega_1$ et on a :

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \omega_1} \text{ en posant } a_1 = E\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Si $\omega_1 = 0$, $\alpha = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$ est rationnel.

Si ω_1 est non nul, on peut poursuivre le processus et poser $\dfrac{1}{\omega_1} = E\left(\dfrac{1}{\omega_1}\right) + \omega_2$. On a donc :

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \omega_2}} \quad \text{en posant} \quad a_2 = E\left(\frac{1}{\omega_1}\right).$$

On constate que $\omega_1 = \dfrac{1}{\omega} - E\left(\dfrac{1}{\omega}\right)$, $\omega_2 = \dfrac{1}{\omega_1} - E\left(\dfrac{1}{\omega_1}\right)$, ce qui suggère l'introduction de l'application T définie sur l'intervalle $[0, 1[$ par $T(0) = 0$ et, $\forall x \in]0, 1[$, $T(x) = \dfrac{1}{x} - E\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exemple : Calculer $T(\sqrt{2} - 1)$.

Pour $\alpha = \sqrt{2}$, déterminer a_0, a_1, a_2 et ω_2.

A. Suite d'entiers associée à un nombre irrationnel positif.

1. Montrer que, $\forall x \in [0, 1[$, $T(x) \in [0, 1[$ et que

$$\forall x \in]0, 1[,\quad E\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant 1.$$

On définit $T^0 = \mathrm{id}$ où id désigne l'application identique de l'intervalle $[0, 1[$ dans lui-même puis, par récurrence, pour tout entier naturel n, $T^{n+1} = T \circ T^n$.

2. Soit ω un réel strictement compris entre 0 et 1.

On se propose de démontrer que ω est rationnel si et seulement si $T^n(\omega)$ est nul à partir d'un certain rang.

a. Montrer que $T(\omega)$ est rationnel si et seulement si ω est rationnel.

En déduire que, si ω est irrationnel, pour tout entier naturel n, $T^n(\omega)$ est différent de 0.

b. Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$. Montrer que $T\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{r}{p}$ où r est le reste de la division euclidienne de q par p.

En déduire que, si ω est rationnel, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $T^{n_0-1}(\omega)$ soit non nul et que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $T^n(\omega) = 0$.

3. α étant un nombre irrationnel positif, on considère $\omega = \alpha - E(\alpha)$.

Vérifier qu'on définit une suite d'entiers naturels (a_n), strictement positifs sauf peut-être a_0, en posant :

$$a_0 = E(\alpha) \text{ et, } \forall n \geq 1, \ a_n = E\left(\frac{1}{T^{n-1}(\omega)}\right).$$

B. **Développement en fraction continue.**

En se plaçant dans l'hypothèse et avec les notations du A.3., on considère la suite de fonctions (φ_n), définies sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi_0(x) = a_0 + x$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_{n+1}(x) = \varphi_n\left(\frac{1}{a_{n+1} + x}\right)$$

Enfin on pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = \varphi_n(0)$, associant ainsi au réel α une nouvelle suite numérique, la suite (r_n).

On a donc $r_0 = a_0$, $r_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$, $r_2 = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}}$ etc...

Remarquant que r_n ne dépend que de la suite finie $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, on note $r_1 = [a_0, a_1]$, $r_2 = [a_0, a_1, a_2]$, $r_n = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

L'objectif de cette partie est de démontrer la convergence de la suite (r_n) vers α.

1. Convergence des suites (r_{2n}) et (r_{2n+1}).

a. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha = \varphi_n(T^n(\omega))$.

b. Montrer que les fonctions φ_n sont strictement monotones, décroissantes si n est impair, croissantes si n est pair.

c. Déduire des questions précédentes que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{2n} < \alpha < r_{2n+1}$.

d. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{n+2} - r_n = \varphi_n\left(\dfrac{1}{a_{n+1} + \dfrac{1}{a_{n+2}}}\right) - \varphi_n(0)$.

En déduire que la suite (r_{2n}) est croissante et la suite (r_{2n+1}) décroissante.

e. Montrer que chacune des suites (r_{2n}) et (r_{2n+1}) est convergente.

2. Expression de r_n sous forme de fraction irréductible.

a. Montrer que, $\forall n \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_n(x) = \dfrac{p_n + x\,p_{n-1}}{q_n + x\,q_{n-1}}$ où (p_n) et (q_n) sont deux suites d'entiers naturels définies par $p_0 = a_0$, $p_1 = 1 + a_0 a_1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ et

$$\forall n \geq 2, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

En déduire que $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

b. Propriétés des suites (p_n) et (q_n).

Montrer que : i. les suites (p_n) et (q_n) sont croissantes.

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_{n+2} \geqslant 2\, q_n$.

iii. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = (-1)^{n+1}$.

iiii. $\forall n \geqslant 1, \quad p_n$ et q_n sont premiers entre eux.

3. Convergence de la suite (r_n).

a. En remarquant que, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \dfrac{1}{q_n\, q_{n+1}}$,

montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

b. Montrer que, $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \dfrac{p_n}{q_n} - \alpha \right| < \dfrac{1}{q_n\, q_{n+1}} \quad$ et $\quad \left| \dfrac{p_n}{q_n} - \alpha \right| < \dfrac{1}{2^n}$.

En déduire que la suite (r_n) converge vers α.

On dit qu'on a effectué le développement en fraction continue de α et on écrit :

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots].$$

r_n est nommé développement en fraction continue d'ordre n de α.

c. En remarquant que $\left| \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \leqslant \dfrac{1}{2} \left| \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \dfrac{p_n}{q_n} \right|$, montrer que $\left| \dfrac{p_n}{q_n} - \alpha \right| < \left| \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \alpha \right|$.

d. i. Soient a, b, c, d, p, q six nombres entiers naturels tels que $\quad bc - ad = 1 \quad$ et $\quad \dfrac{a}{b} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{c}{d}$.

Montrer que $p > a, \; p > c, \; q > b, \; q > d$.

ii. En déduire que, si le nombre rationnel positif $\dfrac{p}{q}$ est une meilleure approximation de α que $\dfrac{p_n}{q_n}$, alors $p > p_n$ et $q > q_n$.

4. Exemple : développement en fraction continue de $\sqrt{2}$. Les notations sont celles de la partie I.

a. Vérifier que les suites (p_n) et (q_n) introduites au I sont caractérisées par :

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 1, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = 2$$

$$\text{et} \qquad \forall n \geqslant 2, \quad p_n = 2\, p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = 2\, q_{n-1} + q_{n-2}.$$

b. En utilisant le calcul de $\mathrm{T}(\sqrt{2} - 1)$ donner le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

5. Cas d'un nombre rationnel.

Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que α est un nombre rationnel, strictement positif, non entier.

On pose à nouveau $a_0 = \mathrm{E}(\alpha)$ et $\omega = \alpha - \mathrm{E}(\alpha)$. On sait (III.A.2.) qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que $\mathrm{T}^{n_0 - 1}(\omega) \neq 0 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant n_0, \quad \mathrm{T}^n(\omega) = 0$.

On pose, pour $1 \leqslant n \leqslant n_0, \; a_n = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{T}^{n-1}(\omega)}\right)$.

a. Montrer que $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_{n_0}]$ (notation du III.B.).

On dit qu'on a un développement en fraction continue fini de α.

On pourra adapter à cette situation l'étude faite dans le cas où α est irrationnel.

α étant écrit sous forme fractionnaire $\dfrac{p}{q}$, vérifier que $a_0, a_1, \dots, a_{n_0}$ sont obtenus à partir de l'algorithme d'Euclide pour la recherche du plus grand commun diviseur de p et q et qu'on a $a_{n_0} \geqslant 2$.

b. Dans chacun des deux cas $\alpha = \dfrac{193}{71}$ et $\alpha = \dfrac{2\,721}{1\,001}$, expliciter $a_0, a_1, \dots, a_{n_0}$.

- Soit (a_n) une suite d'entiers naturels, strictement positifs sauf peut-être a_0. On lui associe la suite (r_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ (voir III.B.).

On pourrait, en introduisant les suites (p_n) et (q_n) définies à partir de la suite (a_n) comme au III.B.2. ainsi que la suite de fonctions (φ_n), démontrer que la suite (r_n) est convergente et que sa limite α a pour développement en fraction continue $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$, mais nous admettrons tout ceci dans la fin de ce problème.

IV. DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE DE e

Les notations sont celles de la partie II

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = P_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $q_n = Q_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On sait (cf. II) que la suite $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ a pour limite $\operatorname{th}\dfrac{1}{2}$.

1. Développement en fraction continue de $\operatorname{th}\dfrac{1}{2}$.

a. Vérifier que les suites (p_n) et (q_n) sont caractérisées par les conditions : $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = 2$ et $\forall n \geqslant 2$, $p_n = 2(2n-1)\,p_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = 2(2n-1)\,q_{n-1} + q_{n-2}$.

b. En déduire que le développement en fraction continue de $\operatorname{th}\dfrac{1}{2}$ est :

$$\operatorname{th}\frac{1}{2} = [0,\ 2,\ 6,\ 10,\ \dots,\ 2(2n-1),\ \dots].$$

2. Développement en fraction continue de e.

a. Montrer que $e = \dfrac{1+\operatorname{th}\frac{1}{2}}{1-\operatorname{th}\frac{1}{2}}$.

b. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n > p_n$.

c. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{q_n+p_n}{q_n-p_n}\right)$ a pour limite e et plus précisément que,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{q_{2n}+p_{2n}}{q_{2n}-p_{2n}} < e < \frac{q_{2n+1}+p_{2n+1}}{q_{2n+1}-p_{2n+1}}.$$

d. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q_n + p_n$, $v_n = q_n - p_n$.

Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $u_n = 2(2n-1)\,u_{n-1} + u_{n-2}$

$v_n = 2(2n-1)\,v_{n-1} + v_{n-2}$.

Dire pourquoi $\dfrac{u_n}{v_n}$ ne peut être le développement en fraction continue d'ordre n de e.

e. Calculer u_n et v_n pour les valeurs 2, 3, 4 de n.

L'expression des développements en fractions continues de $\dfrac{193}{71}$ et de $\dfrac{2721}{1001}$ suggère d'introduire $\alpha = [2,\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n,\ \dots]$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad c_{3n+1} = c_{3n+3} = 1, \qquad c_{3n+2} = 2n + 2.$$

On note $\dfrac{y_n}{z_n}$ la forme irréductible du développement en fraction continue d'ordre n de α.

i. Montrer que, $\forall n \geqslant 3$, $\begin{cases} y_{3n-2} = 2(2n-1)\, y_{3n-5} + y_{3n-8} \\ z_{3n-2} = 2(2n-1)\, z_{3n-5} + z_{3n-8} \end{cases}$

$\big(2(2n-1)\, y_{3n-5} + y_{3n-8}\big)$

$\big(2(2n-1)\, z_{3n-5} + z_{3n-8}\big)$

On pourra utiliser la relation de récurrence vérifiée par les suites (y_k) et (z_k) pour les valeurs de k :

$$3n-2, \quad 3n-3, \quad 3n-4, \quad 3n-5, \quad 3n-6.$$

ii. Montrer qu'on a, $\forall n \geqslant 1$, $\quad u_n = y_{3n-2}, \quad v_n = z_{3n-2}$.

f. Déduire des résultats précédents que :

$$e = [2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ \dots,\ c_n,\ \dots].$$

g. Application numérique.

Munir la calculatrice d'un programme permettant d'obtenir, à partir de la suite (c_n), les suites (y_n) et (z_n). Compte tenu de la capacité de la machine, indiquer le plus grand entier n_1 pour lequel les valeurs affichées de y_{n_1} et z_{n_1} sont exactes.

Préciser le sens de l'erreur commise et un majorant de cette erreur si on prend $\dfrac{y_{n_1}}{z_{n_1}}$ comme approximation de e.