Devoir en temps libre numero 3

Il s'agit ici de construire une bijection « explicite » de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$. On suppose l'ensemble des naturels, $\mathbb{N}$, connu avec ses propriétés habituelles, c'est-à-dire entre autres, la division euclidienne, la relation d'ordre partiel de divisibilité et le raisonnnement par réccurence

On rappelle qu'un entier strictement positif est dit *premier* s'il admet exactement deux diviseurs, à savoir 1 et lui-même. Le nombre 1 n'est pas premier, le plus petit nombre premier est 2 et tous les autres sont impairs.

1. Montrer que tout nombre entier au moins égal à 2 admet un diviseur premier.
2. En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini.

On peut ainsi créer la suite des nombres premiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ avec $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ et si $(p_i)_{1\leq i\leq n}$ sont donnés avec $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ on pose $p_{n+1} = \min\{q \in \mathbb{N}, q\text{premier et } q > p_n\}$.

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n il existe une unique suite $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que $J_n = \{k \in \mathbb{N}^\star \quad | \quad a_{n,k} \neq 0\}$ soit fini (éventuellement vide) et $n = \displaystyle\prod_{k\in J_n} p_k^{a_{n,k}}$.

   (On conviendra q'un produit vide vaut 1)

Avec $p_k^0 = 1$ pour tout k de $\mathbb{N}^\star$ on écrit $n = \displaystyle\prod_{k\in\mathbb{N}^\star} p_k^{a_{n,k}}$ au sens de $n = \displaystyle\prod_{k\in J_n} p_k^{a_{n,k}}$.

4. Montrer que pour rationnel strictement positif r il existe une unique suites $(a_{r,k})_{k\in\mathbb{N}^\star}$ à valeur dans $\mathbb{Z}$ telle que $J_r = \{k \in \mathbb{N}^\star \quad | \quad a_{r,k} \neq 0\}$ soit fini (éventuellement vide) et $r = \displaystyle\prod_{k\in J_r} p_k^{a_{r,k}}$
5. Pour tout p de $\mathbb{N}$ on pose

$$f(2p) = -p \qquad \text{et} \qquad f(2p+1) = p+1$$

   Vérifier (c'est-à-dire démontrer) que f est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.
6. A l'aide de f et de la décomposition obtenue en 4, expliciter une bijection φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}^+$ et préciser $\varphi(4699292)$ et $\varphi^{-1}\left(\dfrac{477}{512}\right)$.
7. Ecrire en Python deux fonctions qui implémentent φ et sa réciproque. On pourra représenter un rationnel par une liste [numérateur, dénominateur] en supposant qu'il est déjà sous forme irréductible.
8. Avec ce qui précède, construire une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$.