Exercice - M0003

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[1;100]$ par :

$$g(x) = x^3 - 1200x - 100$$

1. Calculer $g'(x)$.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[20;40]$.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α arrondie à l'unité.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[1;100]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[1;100]$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unité graphique 1 cm pour 5 unités en abscisses, et 1 cm pour 20 unités en ordonnées.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ en utilisant les résultats de la question 5 de la partie A.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[1;100]$.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
5. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 130$ (on donnera des valeurs des solutions arrondies à l'unité).

Partie C

Une entreprise fabrique des tee-shirsts ; le coût total de fabrication de x centaines de tee-shirts est donné, pour x appartenant à $[1;100]$ par :

$$C(x) = x^2 + 50x + 1200 + \frac{50}{x}$$

où $C(x)$ est exprimée en euros. Le coût moyen de fabrication d'une centaine de tee-shirt lorsque x centaines sont fabriquées est définie par

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

1. Déterminer la quantité de tee-shirt arrondie à l'unité à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal.
2. Préciser ce coût minimum pour une centaine de tee-shirt.