Exercice - M0004C

1) Montrons que
$$\forall x \in [0;+\infty[\qquad x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \qquad (1)$$
Posons
$$f(x)=\ln(1+x)-x$$
$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{1-1-x}{1+x}$$
Donc
$$f'(x)=-\frac{x}{1+x}$$
Sur $[0;+\infty[$ la dérivée est négative et la fonction f est décroissante. Donc
$$\forall x \in [0;+\infty[\qquad f(x) \leq f(0)$$
Or $f(0)=0$ donc f est négative sur l'intevalle $[0;+\infty[$
$$f(x) \leq 0 \iff \ln(1+x)-x \leq 0 \iff \ln(1+x) \leq x$$
Ce qui établit une première inégalité. Procédons de même pour la deuxième inégalité. Posons
$$g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$$
$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1-(1-x)(1+x)}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$$
Donc
$$g'(x)=\frac{x^2}{1+x}$$
Sur $[0;+\infty[$ la dérivée est positive et la fonction g est croissante. Donc
$$\forall x \in [0;+\infty[\qquad g(0) \leq g(x)$$
Or $g(0)=0$ donc g est positive sur l'intevalle $[0;+\infty[$
$$0 \leq g(x) \iff 0 \leq \ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2} \iff x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$
Ce qui établit la deuxième inégalité et nous pouvons conclure que
$$\forall x \in [0;+\infty[\qquad x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \qquad (1)$$

2) Montrons que la suite (u_n) converge. Pour cela nous allons montrer successivement que la suite est positive, croissante et majorée.

u_1 est positif. Compte tenu de la définition de la suite (u_n), si u_n est positif u_{n+1} l'est aussi, ce qui établit par une réccurence immédiate que la suite (u_n) est à termes positifs.
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{1}{n^{n+1}}$$
Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$$
La suite (u_n) est donc croissante.

Intéressons nous à $\ln(u_n)$. (les termes (u_n) sont positifs)

$$\ln(u_n) = \ln(u_{n-1}) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

Autrement dit

$$\ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) = \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

On a donc une suite télescopique

$$\ln(u_n) - \ln(u_1) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\ln(u_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

Or

$$\ln(u_1) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

Donc

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

De línégalité $\ln(1+x) \leq x$ nous déduissons

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique

$$S_= \frac{1}{2}\frac{1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

La suite (S_n) est évidement convergente, donc elle est bornée. Il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad \ln(u_n) \leq S_n \leq M$$

ou M est un majorant de la suite (S_n). La suite $\ln(u_n)$ est donc bornée et finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad u_n \leq e^M$$

La suite (u_n) est donc majorée. Or la suite (u_n) est converge, donc elle converge (puisque tout suite croissante majorée converge).

Conclusion : la suite (u_n) est convergente.

3) Donnons un encadrement de la limite de la suite (u_n). Nous avons d'après (1)

$$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

En sommant membre à membre, il vient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} \leq \ln(u_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Posons

$$T_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}$$

Il vient

$$S_n - T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n$$

Or pour la suite (T_n) on a de nouveau la somme des termes d'une suite géométrique.

$$T_= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

Les suites (u_n), (S_n), (T_n) et $\ln(u_n)$ sont toutes convergentes. Nous avons

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{6}$$

Passons à la limite dans l'inégalité

$$S_n - T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n$$

Il vient

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} T_n \leq \lim_{n\to\infty} \ln(u_n) \leq \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$1 - \frac{1}{6} \leq \lim_{n\to\infty} \ln(u_n) \leq 1$$

Conclusion

$$e^{\frac{5}{6}} \leq \lim_{n\to\infty} u_n \leq e$$

n	$1/2^n$	S_n	$1/4^n$	T_n	$S_n - T_n/2$	u_n	$\ln u_n$
1	$0,5$	$0,5$	$0,25$	$0,25$	$0,375$	$1,5$	$0,405465108$
2	$0,25$	$0,75$	$0,0625$	$0,3125$	$0,59375$	$1,875$	$0,628608659$
3	$0,125$	$0,875$	$0,015625$	$0,328125$	$0,7109375$	$2,109375$	$0,746391695$
4	$0,0625$	$0,9375$	$0,00390625$	$0,33203125$	$0,771484375$	$2,241210938$	$0,807016317$
5	$0,03125$	$0,96875$	$0,000976563$	$0,333007813$	$0,802246094$	$2,311248779$	$0,837787976$
6	$0,015625$	$0,984375$	$0,000244141$	$0,333251953$	$0,817749023$	$2,347362041$	$0,853292162$
7	$0,0078125$	$0,9921875$	$6,10352E-05$	$0,333312988$	$0,825531006$	$2,365700807$	$0,861074303$
8	$0,00390625$	$0,99609375$	$1,52588E-05$	$0,333328247$	$0,829429626$	$2,374941826$	$0,864972943$
9	$0,001953125$	$0,998046875$	$3,8147E-06$	$0,333332062$	$0,831380844$	$2,379580384$	$0,866924163$
10	$0,000976563$	$0,999023438$	$9,53674E-07$	$0,333333015$	$0,83235693$	$2,381904193$	$0,867900249$
11	$0,000488281$	$0,999511719$	$2,38419E-07$	$0,333333254$	$0,832845092$	$2,383067233$	$0,868388411$
12	$0,000244141$	$0,999755859$	$5,96046E-08$	$0,333333313$	$0,833089203$	$2,383649036$	$0,868632522$
13	$0,00012207$	$0,99987793$	$1,49012E-08$	$0,333333328$	$0,833211266$	$2,383940009$	$0,868754585$
14	$6,10352E-05$	$0,999938965$	$3,72529E-09$	$0,333333332$	$0,833272299$	$2,384085513$	$0,868815618$
15	$3,05176E-05$	$0,999969482$	$9,31323E-10$	$0,333333333$	$0,833302816$	$2,38415827$	$0,868846135$
16	$1,52588E-05$	$0,999984741$	$2,32831E-10$	$0,333333333$	$0,833318075$	$2,384194649$	$0,868861394$
17	$7,62939E-06$	$0,999992371$	$5,82077E-11$	$0,333333333$	$0,833325704$	$2,384212839$	$0,868869023$
18	$3,8147E-06$	$0,999996185$	$1,45519E-11$	$0,333333333$	$0,833329519$	$2,384221934$	$0,868872838$
19	$1,90735E-06$	$0,999998093$	$3,63798E-12$	$0,333333333$	$0,833331426$	$2,384226481$	$0,868874745$
20	$9,53674E-07$	$0,999999046$	$9,09495E-13$	$0,333333333$	$0,83333238$	$2,384228755$	$0,868875699$
21	$4,76837E-07$	$0,999999523$	$2,27374E-13$	$0,333333333$	$0,833332856$	$2,384229892$	$0,868876176$
22	$2,38419E-07$	$0,999999762$	$5,68434E-14$	$0,333333333$	$0,833333095$	$2,384230461$	$0,868876414$
23	$1,19209E-07$	$0,999999881$	$1,42109E-14$	$0,333333333$	$0,833333214$	$2,384230745$	$0,868876533$
24	$5,96046E-08$	$0,99999994$	$3,55271E-15$	$0,333333333$	$0,833333274$	$2,384230887$	$0,868876593$
25	$2,98023E-08$	$0,99999997$	$8,88178E-16$	$0,333333333$	$0,833333304$	$2,384230958$	$0,868876623$
26	$1,49012E-08$	$0,999999985$	$2,22045E-16$	$0,333333333$	$0,833333318$	$2,384230994$	$0,868876638$
27	$7,45058E-09$	$0,999999993$	$5,55112E-17$	$0,333333333$	$0,833333326$	$2,384231011$	$0,868876645$
28	$3,72529E-09$	$0,999999996$	$1,38778E-17$	$0,333333333$	$0,83333333$	$2,38423102$	$0,868876649$
29	$1,86265E-09$	$0,999999998$	$3,46945E-18$	$0,333333333$	$0,833333331$	$2,384231025$	$0,868876651$
30	$9,31323E-10$	$0,999999999$	$8,67362E-19$	$0,333333333$	$0,833333332$	$2,384231027$	$0,868876652$