Exercice - M0011C

Pour tout i compris entre 1 et n, nous avons

$$n^2 + 1 \leq n^2 + i \leq n^2 + n$$

En prenant l'inverse, il vient

$$\frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2 + i} \leq \frac{1}{n^2 + 1}$$

En multipliant par n

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + i} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

Et enfin en sommant de 1 à n

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + n} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

$$\frac{n}{n + 1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

Et finalement

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \leq \lim_{n \to +\infty} u_n \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

$$1 \leq \lim_{n \to +\infty} u_n \leq 1$$

Conclusion : la limite de la suite (u_n) est un.