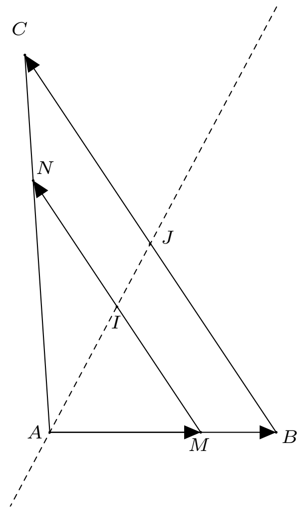
Exercice - M0014C

1a) Représentons la situation sur une figure.



1b) Nous avons

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

Calculons $\overrightarrow{MN}$. En utilisant la relation de Chasles, nous avons

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

2a) Montrons que

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

La relation de Chales nous donne

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI}$$

I est le milieu de $[MN]$ donc

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Conclusion

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

2b) Procédons de même, J étant le milieux de $[BC]$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Conclusion

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

2c) Nous avons

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

Donc

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires, donc les points A, I et J sont alignés.