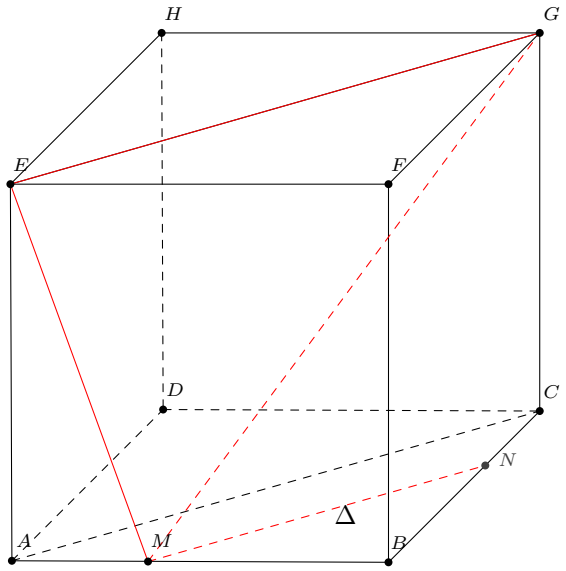
Exercice - M0022C

Traçons la figure



$ABCDEFGH$ est un cube, donc chaque face est un carré. Donc, les droites AB et EF sont parallèles d'une part, et les droites AD et EH sont parallèles. On en déduit que les plans ABC et EFG sont parallèles, propriété bien connues des faces du cube.

Les droites AE et BF sont parallèles, ce sont les arrêtes opposées d'une même face. De même, les droites BF et CG sont parallèles. Donc la droite AE est parallèle à la droite CG. On en déduit de surcroit que les droites AE et CG sont coplanaires. Les quatre points A, E, C, G sont dans un même plan.

La droite AE est perpendiculaire à la droite EF, la droite AE est perpendiculaire à la droite EH. Les droites EF et EH sont sécantes. On en déduit que la droite AE est perpendiculaire au plan EFG .

De même la droite AE est perpendiculaire à la droite AB et à la droite AD donc la droite AE est perpendiculaire au plan ABC.

La droite AE étant perpendiculaire au plan ABC elle est perpendiculaire à toute droite de ce plan, donc la droite AE est perpendiculaire à la droite AC. De même, la droite AE est perpendiculaire à toute droite du plan EFG, donc la droite AE est perpendiculaire à la droite EG. Les pointsA, E, C, G sont dans un même plan, donc les droites AC et EG sont coplanaires. AC et EG sont des droites perpendiculaires à une même troisième, à savoir la droite AE, elle sont donc parallèles. Les diagonales du cube sont AC et EG sont parallèles.

Considérons les plans ABC et EMG. La droite AC est incluse dans le plan ABC, la droite EG est incluse dans le plan EMG, ces deux droites sont parallèles. De plus les deux plans sont sécants puisque le point M appartient aux deux plans. Le point M est évidement dans le plan EMG et le point M est sur le segement AB. Le théorême du toit permet d'affirmer que la droite Δ intersection des plans ABC et EMG est parallèles aux droites AC et EG.

Le point M est sur la droite Δ, nous l'avons expliqué dans le paragraphe précédent. Quant au point N, il est sur le segment BC, il appartient donc au plan ABC. Le point N appartient également au plan EMG, ce point est par définition l'intersection du plan EMG et de l'arrête BC. Donc la point N appartient à l'intersection des plans ABC etEMG, le point N appartient à la droite Δ. Les droites MN et Δ sont égales. Or la droite Δ est parallèle à la droite AC. On peut donc conclure que les droites AC et MN sont parallèles.