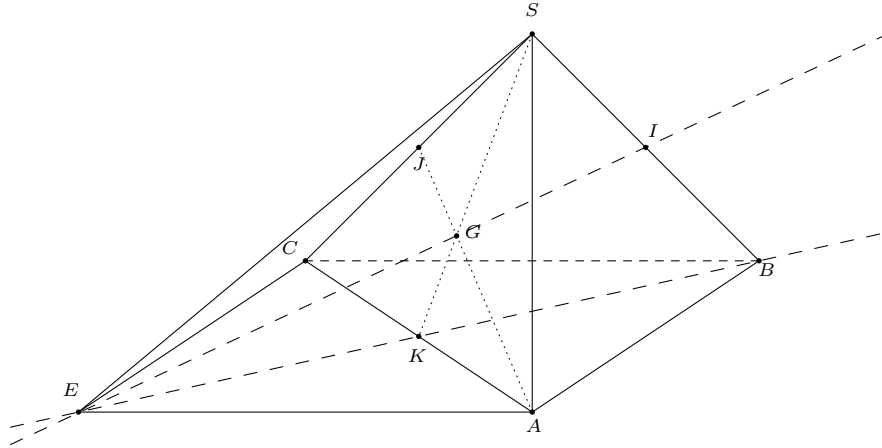


Exercice - M0024C

$ABCS$ est un tétraèdre. Soit I le milieu de $[SB]$ et G le barycentre de SAC . E est l'intersection de la droite (IG) avec le plan ABC . Montrons que $ABCE$ est un parallélogramme.



G est le barycentre du triangle SAC donc le point d'intersection des médianes. Soit J le milieu de $[SC]$ et K le milieu de $[AC]$. G est donc le point d'intersection des droites (SK) et (AJ) .

E est le point d'intersection de la droite (IG) et du plan ABC . Construisons le point E . Le point I est sur le segment $[SB]$, il appartient donc au plan SBK . Le point G est sur le segment $[SK]$, il appartient donc également au plan SBK . La droite (IG) est donc incluse dans le plan SBK . Considérons maintenant la droite (BK) . Le point K est sur le segment $[AC]$, donc le point K appartient au plan ABC de même que le point B . La droite (BK) est donc une droite du plan ABC . La droite (BK) est également une droite du plan SBK . La droite (BK) est donc l'intersection des plans ABC et SBK . Les droites (IG) et (BK) sont coplanaires et sécantes car G n'est pas le milieu de $[SK]$. Le point d'intersection des droites (IG) et (BK) appartient à la droite (IG) et au plan ABC puisque (BK) est incluse dans le plan ABC . Il s'agit donc du point E . E est le point d'intersection des droites (IG) et (BK) .

Montrons que le quadrilatère $ABCE$ est un parallélogramme. Les quatre points sont dans le plan ABC . Par définition, K est le milieu de $[AC]$. Nous allons montrer que K est également le milieu de $[BE]$. Plaçons nous dans le triangle SBE . La droite (EG) est la médiane issue du sommet E . En effet les droites (EG) et (IG) sont égales et I est le milieu de $[SB]$. G étant le barycentre du triangle SAC on a $KG = \frac{1}{3}SK$ et $SG = \frac{2}{3}SK$. G est également le point d'intersection des droites (IG) et (SK) . Il est sur la médiane (EI) et sur une droite issue du sommet S joignant le point K du côté opposé situé à la distance $\frac{2}{3}$ de SK . G est donc également le barycentre du triangle SBE . La droite SK est donc une médiane et le point K le milieu du segment $[BE]$.

Conclusion : K est le milieu de $[BE]$ et de $[AC]$, $ABCE$ est un parallélogramme