Exercice - M0025C

Ecrire 999^4+4 comme le poduit de trois nombres. Rercherchons une factorisation du polynome X^4+4. L'équation

$$X^4+4=0$$

n'a évidement pas de solutions dans $\mathbb{R}$, mais elle a quatre solutions dans $\mathbb{C}$.

$$X^4=-4=4e^{i(\pi+2k\pi)}$$

On en déduit les racines de l'équation

$$X_{k+1}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)} \qquad k=0,1,2,3$$

Autrement dit :

$$X_1=1+i \qquad X_2=-1+i \qquad X_3=-1-i \qquad X_4=1-i$$

Nous pouvons donc factoriser le polynme

$$\begin{aligned}
X^4+1 &= (X-X_1)(X-X_2)(X-X_3)(X-X_4)\\
&= (X-X_1)(X-X_4)(X-X_2)(X-X_3)\\
&= (X-X_1)(X-\bar{X}_1)(X-X_2)(X-\bar{X}_2)\\
&= \left(X^2-(X_1+\bar{X}_1)X+X_1\bar{X}_1\right)\left(X^2-(X_2+\bar{X}_2)X+X_2\bar{X}_2\right)\\
&= \left(X^2-2(\Re X_1)-X+|X_1|^2\right)\left(X^2-2(\Re X_2)X+|X_2|^2\right)\\
&= [(X-(1+i))(X-(1-i))]\cdot[(X-(-1+i))(X-(-1-i))]\\
&= \left(X^2+2X+2\right)\left(X^2-2X+2\right)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons immédiatement

$$\begin{aligned}
999^4+4 &= (999^2+2\times 999+2)((999^2-2\times 999+2)\\
&= (998\ 001+1\ 998+2)((998\ 001-1\ 998+2)\\
&= 1\ 000\ 001\times 996\ 005\\
&= 5\times 199\ 201\times 1\ 000\ 001
\end{aligned}$$

Conclusion : Nous obtenons 999^4+4 comme le produit de trois nombres

$$\boxed{999^4+4=5\times 199\ 201\times 1\ 000\ 001}$$