Exercice - M0026C

Exprimons l'aire du triangle en fonction de l'angle $\theta = \widehat{ABC}$.

$$S = \frac{BC \times AH}{2}$$

$$AH = AB \sin\theta \qquad BC = 2AB\cos\theta$$

Donc

$$A = AB^2 \sin\theta\cos\theta$$

Exprimons AB en fonction du périmètre

$$AB + AC + BC = p \qquad 2AB + 2AB\cos\theta = p$$

On en déduit

$$AB = \frac{p}{2(1+\cos\theta)}$$

Obtient ainsi l'expression de l'aire du triangle en fonction du périmètre et de θ.

$$A(\theta) = \frac{p^2}{4}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

Etudions les variations de $A(\theta)$ et pour cela calculons la dérivée

$$\begin{aligned}
A'(\theta) &= \frac{p^2}{4}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(1+\cos\theta)^2 - 2(1+\cos\theta)(-\sin\theta)\sin\theta\cos\theta}{(1+\cos\theta)^4}\\
&= \frac{p^2}{4}\frac{(1+\cos\theta)((\cos^2\theta - \sin^2\theta)(1+\cos\theta) + 2\sin^2\theta\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^4}\\
&= \frac{p^2}{4}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(1+\cos\theta) + 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta}{(1+\cos\theta)^3}\\
&= \frac{p^2}{4}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(1+\cos\theta) + 2(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)\cos\theta}{(1+\cos\theta)^3}\\
&= \frac{p^2}{4}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2(1-\cos\theta)\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}\\
&= \frac{p^2}{4}\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\cos\theta - 2\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}\\
&= \frac{p^2}{4}\frac{2\cos\theta - (\cos^2 + \sin^2\theta)}{(1+\cos\theta)^2}
\end{aligned}$$

D'ou la dérivée

$$A'(\theta) = \frac{p^2(2\cos\theta - 1)}{4(1+\cos\theta)^2}$$

La dérivée s'annulle et change de signe pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ Ce qui correspond à un triangle équilatéral !