Exercice - M0027C

Un navire se déplace à la surface de la terre et navigue à cap constant. Quelle est l'équation de la trajectoire ? Introduisons quelques notations

- O le centre de la terre
- M le point représentatif du navire
- r le rayon terrestre
- φ la longitude
- θ la colatitude
- γ le cap (donc l'angle entre la direction du navire et les méridiens

La postion du navire peut donc être repérée par

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Calculons les vecteurs

$$\vec{u}_r = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r} \qquad \vec{u}_\varphi = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\varphi} \qquad \vec{u}_\theta \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta}$$

Donc

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u}_r$$

Calculons les coodonnées des vecteurs $\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta$. Nous avons

$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\|\vec{u}_\varphi\| = r\sin\theta \qquad \|\vec{u}_\theta\| = r$$

Considérons comme une fonction de t

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\overrightarrow{OM}}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\overrightarrow{OM}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Le navire se déplace à la surface de la terre, donc r est contant. On en déduit l'expression du vecteur tangeant à la trajectoire $\vec{V}$ (en fait la vitesse pour les physiciens).

$$\vec{V} = \dot{}u_\theta + \dot{\varphi}\vec{u}_\varphi \qquad \|\vec{V}\| = \dot{\theta}^2\|u_\theta\|^2 + \dot{\varphi}^2\|\vec{u}_\varphi\|^2$$

Calculons le produit scalaire $\vec{V}\cdot\vec{u}_\varphi$.

$$\vec{V}\cdot\vec{u}_\varphi = \|\vec{V}\|\cdot\|\vec{u}_\varphi\|\cos\alpha$$

ou α est l'angle entre la direction du navire et le parallèle. Il vient, en élevant au carré.

$$(\dot{\theta}^2\|u_\theta\|^2 + \dot{\varphi}^2\|\vec{u}_\varphi\|^2)\|\vec{u}_\varphi\|^2\cos^2\alpha = \dot{\varphi}^2\|\vec{u}_\varphi\|^4$$

$$\dot{\theta}^2\|\vec{u}_\theta\|^2\cos^2\alpha = \dot{\varphi}^2\|\vec{u}_\varphi\|^2(1-\cos^2\alpha)$$

$$\dot{\theta}\|\vec{u}_\theta\|\cos\alpha = \dot{\varphi}\|\vec{u}_\varphi\|\sin\alpha$$

Et finalement

$$\dot{\theta}r = \dot{\varphi}r\sin\theta\tan\alpha$$

En séparant les variables

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} = \tan\alpha \mathrm{d}\varphi$$

Equation que l'on intègre

$$\ln\tan\frac{\theta}{2} = \tan\alpha\varphi + Cte$$

$$\ln\tan\frac{\theta}{2} - \ln\tan\frac{\theta_0}{2} = \tan\alpha(\varphi - \varphi_0)$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{\theta_0}{2} e^{\tan\alpha(\varphi-\varphi_0)}$$

Annexe : calcul de la primitive de $\dfrac{1}{\sin\theta}$. On effectue le changement de variable classique en exprimant le sinus à partir de la tangente de l'angle moitié. On pose

$$u = \tan\frac{\theta}{2} \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta$$

Nous avons

$$\sin\theta = \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} = \int\frac{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}\mathrm{d}\theta = \int\frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln u$$

La primitive est donc

$$\ln\tan\frac{\theta}{2}$$

Remarque : l'article Wikipedia sur la Loxodromie, propose une autre méthode dans laquelle la tractoire est directement exprimée comme une relation entre la latitute et la longitude, autrement dit $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(\theta, \theta(\varphi))$. On calcule ensuite le vecteur tangent, puis exprime le produit scalaire avec le vecteur directeur des parallèles.