Exercice - M0028C

1) Etude de la fonction sinus hyperbolique

1a) Montrons que la fonction sh est impaire.

$$\mathrm{sh}{-x} = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\mathrm{sh}x$$

Donc

$$\mathrm{sh} - x = -\mathrm{sh}x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction sinus hyperbolique est donc impaire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

1b) On étudie la limite en plus l'infini.

$$\lim_{x\to\infty} e^{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

Donc

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{sh}x = +\infty$$

2b) Le calcul de la dérivée est immédiat

$$\mathrm{sh}'x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}x$$

La dérivée est manifestement positive donc la fonction est monotone croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction étant impaire, la limite en $-\infty$ est $-\infty$. On en déduit le tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathrm{sh}'x$		$+$	
$\mathrm{sh}x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

1d) Etudions le signe. Le fait que la fonction soit impaire impose nécessairement $\mathrm{sh}0 = 0$.

$$\mathrm{sh} - 0 = \mathrm{sh}0 \qquad \mathrm{sh} - 0 = -\mathrm{sh}0$$

donc $2\mathrm{sh}0 = 0$ et donc

$$\mathrm{sh}(0) = 0$$

Compte tenu des variations de sh on

$$\mathrm{sh}x \geq 0 \qquad \forall x \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}x < 0 \qquad \forall x < 0$$

2) Etude de la fonction cosinus hyperbolique

2a) Montrons que la fonction ch est paire.

$$\mathrm{ch}{-x} = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}x$$

Donc

$$\mathrm{ch} - x = \mathrm{ch}x$$

La fonction cosinus hyperbolique est donc paire. Sa coube représentative est donc symétrique par rapport à l'axe Oy.

2b) Compte tenu des limites de l'exponentielle on a trivialement

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{ch}x = +\infty$$

2c) Etudions les variations de ch$x$. Pour cela calculons la dérivée.

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}x$$

Comme nous connaissons le signe de sh, on déduit immédiatement le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
ch$x$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

La limite en $-\infty$ se déduit de la parité ou se calcul directement facilement. Quant à la valeur en 0 on a

$$\mathrm{ch}0 = \frac{e^0 + e - -0}{2} = 1$$

3) Montrons que

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dérivons l'expression

$$2\mathrm{ch}x\mathrm{ch}'x - 2\mathrm{sh}x\mathrm{sh}'x = 2\mathrm{ch}x\mathrm{sh}x - 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x = 0$$

donc l'expression est constante

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}^2 0 - \mathrm{sh}^2 0 = 1$$

Conclusion

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

4) Le point M a pour coordonnées $(x, \mathrm{ch}x)$. Le point P a pour coordonnées $(0, \mathrm{ch}x)$. Le coefficient directeur de la tangente au point M est sh$x$. Le vecteur directeur de la tangente est donc

$$\vec{t}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{sh}x \end{pmatrix}$$

Soit Δ une tangente à Γ passant par P. H le point de contact de Δ et du cercle Γ. On doit avoir OH et PH perpendiculaires donc avec des notations évidentes

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{PH} = x_H(x_H - x_P) + y_H(y_H - y_P) = 0$$

Ce qui nous donne compte tenue de $x_P = 0$ et $y_P = \mathrm{ch}x$

$$x_H^2 + y_H^2 - y_H\mathrm{ch}x = 0$$

$$y_H\mathrm{ch}x = 1$$

$$y_H = \frac{1}{\mathrm{ch}x}$$

On en déduit du fait que H est sur le cercle

$$x_H^2 = 1 - y_H^2 = 1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{\mathrm{ch}^2 x - 1}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x}$$

En conclusion

$$x_H = \epsilon\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} \qquad \epsilon = 1 \text{ ou } -1 \qquad y_H = \frac{1}{\mathrm{ch}x}$$

Et donc le vecteur $\overrightarrow{PH}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{PH}\begin{pmatrix} \dfrac{\epsilon\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} \\ \dfrac{1}{\mathrm{ch}x} - \mathrm{ch}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\epsilon\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} \\ \dfrac{1 - \mathrm{ch}^2}{\mathrm{ch}x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\epsilon\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} \\ \dfrac{-\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}x} \end{pmatrix}$$

On remarque que

$$\overrightarrow{PH} = \frac{-\epsilon \text{sh}x}{\text{ch}x}\vec{t}$$

La tangente en M et donc bien parallèle à l'une des tangentes au cercle.

5) Considérons la droite déquation $y = mx + p$. On cherche les points d'intersection avec la courbe déquation $y = \text{sh}x$. Donc on cherche à résoudre léquation

$$\text{sh}x = mx + p$$

Introduisons la fonction

$$f(x) = \text{sh}x - mx$$

Notre problème revient à chercher le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = p$$

On calcule aisément ses limites à l'infini

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Calculons f' la dérivée

$$f'(x) = \text{ch}x - m$$

1^{er} Cas $m \leq 1$. Dans ce cas f(x) ne s'annule jamais, donc la fonction est stricement croissante. Le théor'eme des valeurs intermédiares permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

2^{eme} Cas $m > 1$ dans ce cas, la dérivée s'annule 2 fois en α et β. On a le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f(x)$			γ				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				δ		

Sans entrer dans le détail de la discussion, il apparait clairement sur le tableau de variation que l'équation peut avoir 1, 2 ou 3 solutions. Selon la valeur de p, aura,

1. $p < \delta$ Une solution unique
2. $\delta < p < \gamma$: trois solutions
3. $p = \gamma$ ou $p = \delta$: deux solutions

Bref, on utilise intensément le théorème des valeurs intermédiare, tant pour prouver l'existance des solutions α, β de l'équation $f'(x) = 0$ donnant les variations, que pour la résolution de l'équation $f(x) = p$.