Exercice - M0035C

1) Déterminons le reste de la division par 7 de $6^n + 13^{n+1}$

n	6^n	13^{n+1}	$6^n + 1^n$	Quotient	Reste
0	1	13	14	2	0
1	6	169	175	25	0
2	36	2197	2233	319	0
3	216	28561	28777	4111	0
4	1296	371293	372589	53227	0
5	7776	4826809	4834585	690655	0
6	46656	62748517	62795173	8970739	0

2) Montrons que, pour tout entier naturel n, $6^n + 13^{n+1}$ est divisible par 7. Nous remarquons que :

$$6^2 = 36 = 7 \times 5 + 1 \qquad 13^2 = 169 = 7 \times 24 + 1$$

Donc

$$6^2 \equiv 1 \pmod 7 \implies 6^{2p} \equiv 1 \pmod 7 \quad \text{et} \quad 6^{2p+1} \equiv 6 \pmod 7$$

et

$$13^2 \equiv 1 \pmod 7 \implies 13^{2p} \equiv 1 \pmod 7 \quad \text{et} \quad 13^{2p+1} \equiv 13 \pmod 7$$

Ainsi

$$n = 2p\&implies 6^n \equiv 1 \pmod 7 \text{ et } 13^{n+1} \equiv 13 \implies 6^n + 13^{n+1} \equiv 14 \pmod 7$$
$$n = 2p+1\&implies 6^n \equiv 6 \pmod 7 \text{ et } 13^{n+1} \equiv 1 \implies 6^n + 13^{n+1} \equiv 7 \pmod 7$$

Conclusion :

$$n = 2p \qquad 6^n + 13^{n+1} \equiv 0 \pmod 7$$
$$n = 2p+1 \qquad 6^n + 13^{n+1} \equiv 0 \pmod 7$$

$6^n + 13^{n+1}$ est divisible par 7.