

Exercice - M0038C

Supposons que n est congru à 3 modulo 13. On a alors, en utilisant la compatibilité de la relation de congruence avec les opérations.

$$n \equiv 3 \pmod{13}$$

$$n^3 \equiv 3^3 \pmod{13}$$

$$n^3 \equiv 27 \pmod{13}$$

$$n^3 \equiv 1 \pmod{13}$$

De même

$$n \equiv 3 \pmod{13}$$

$$3n \equiv 3 \times 3 \pmod{13}$$

$$3n \equiv 9 \pmod{13}$$

Et enfin

$$-10 \equiv -10 \pmod{13}$$

En additionnant membre à membre les relations, il vient

$$n^3 + 3n - 10 \equiv 0 \pmod{13}$$

Donc $n^3 + 3n - 10$ est divisible par 13, et est donc un multiple de 13.

On procède de même pour n congru à 5 modulo 13.

$$n \equiv 5 \pmod{13}$$

$$n^3 \equiv 5^3 \pmod{13}$$

$$n^3 \equiv 125 \pmod{13}$$

$$n^3 \equiv 8 \pmod{13}$$

De même

$$n \equiv 5 \pmod{13}$$

$$3n \equiv 3 \times 5 \pmod{13}$$

$$3n \equiv 15 \pmod{13}$$

$$3n \equiv 2 \pmod{13}$$

En additionnant membre à membre les relations, il vient

$$n^3 + 3n - 10 \equiv 0 \pmod{13}$$

Donc $n^3 + 3n - 10$ est divisible par 13, et est donc un multiple de 13.

Conclusion : si n est congru à 3 ou à 5 modulo 13 alors $n^3 + 3n - 10$ est multiple de 13.