Exercice - M0039C

1) Raisonnons par réccurence. Pour $n = 0$, $u_n = 2$ et donc $u_0 > 0$. Supposons que $u_n > 0$. $u_n + 2$ et $2u_n + 1$ sont positifs et donc u_{n+1} est manifestement positif. L'hérédité nous permet de conclure que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n > 0$

2) Calculons les premières valeurs de la suite

$$\begin{aligned}
u_0 &= 2 \\
u_1 &= \frac{2+2}{2 \times 2 + 1} = \frac{4}{5} \\
u_2 &= \frac{\frac{4}{5} + 2}{2\frac{4}{5} + 1} = \frac{\frac{4+10}{5}}{\frac{8+5}{5}} = \frac{14}{13} \\
u_3 &= \frac{\frac{14}{13} + 2}{2\frac{14}{13} + 1} = \frac{\frac{14+26}{13}}{\frac{28+13}{13}} = \frac{40}{41} \\
u_4 &= \frac{\frac{40}{41} + 2}{2\frac{40}{41} + 1} = \frac{\frac{40+82}{41}}{\frac{80+41}{41}} = \frac{122}{121}
\end{aligned}$$

3) Raisonnons par l'absurde. Suppons que v_n soit égal à 1. Dans ce cas nous avons

$$v_n = 1 = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \implies u_n - 1 = u_n + 1 \implies -1 = 1$$

Nous arrivons à une contradiction, donc l'hypothèse $v_n = 1$ est absurde.

Conclusion : la suite (v_n) ne peut pas prendre la valeur 1.

4) Montrons que la suite (v_n) est géometrique.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} \\
&= \frac{\frac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1}{\frac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 1} \\
&= \frac{\frac{u_n + 2 - 2u_n - 1}{2u_n + 1}}{\frac{u_n + 2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1}} \\
&= \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3} \\
&= \frac{-1}{3} \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \\
&= -\frac{1}{3} v_n
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} = -\frac{1}{3} v_n$$

Calculons le premier terme

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_1 + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

Conclusion : (v_n) est donc une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $\dfrac{1}{3}$.

5) Calculons u_n en fonction de v_n

$$\begin{aligned} & v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \\ \iff & v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \\ \iff & v_n u_n - u_n = -v_n - 1 \\ \iff & u_n(v_n - 1) = -(1 + v_n) \iff u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \end{aligned}$$

La dernière équivalence est possible puisque $v_n \neq 1$ et donc $1 - v_n \neq 0$. Nous obtenons ainsi l'expression de u_n en fonction de v_n.

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Or (v_n) est une suite géométrique. Nous pouvons exprimer le n$^{\text{eme}}$ terme en fonction du premier et de la raison.

$$v_n = v_0 q^n = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$$

On en déduit l'expression de (u_n) en fonction de n. La suite intermédiare (v_n) nous a permis de trouver une formule explicite de la suite (u_n) définie par une relation de récurrence.

$$u_n = \frac{1 = \dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}}{1 - \dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}} = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{3^{n+1} - (-1)^n}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{3^{n+1} - (-1)^n}$$