Exercice - M0040C

1) Les dimensions de la feuille sont x et y. Les dimensions de la zone imprimable compte-tenu des marges sont $x-2$ et $y-3$. L'aire de la zone imprimable est :

$$\mathcal{A} = (x-2)(y-3)$$

L'aire est constante et égale à 150 cm^2. On en déduit

$$(x-2)(y-3) = 150$$

et en isolant y on obtient

$$y = 3 + \frac{150}{x-2}$$

2a) Dans le cas d'un feuille carrée on a $x = y$ donc, en remplaçant y par x dans l'expression de l'aire, il vient

$$(x-2)(x-3) = 150$$

Qui après développement et regroupement donne

$$x^2 - 5x - 144 = 0$$

b) Existe-til des valeurs de x pour lesquelles la feuille est carrée ? Autrement dit l'équation ci dessous a-t-elle des solutions

$$x^2 - 5x - 144 = 0$$

Le calcul du discriminant donne

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-144) = 601$$

Il est strictement positif. L'équation a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{601}}{2} \simeq -9, \qquad x_1 = \frac{5+\sqrt{601}}{2} \simeq 14,$$

Seule la valeur positive à un sens pour notre probème.

3a) La fonction g représente l'aire de la zone imprimable en fonction de x, donc

$$\begin{aligned} g(x) = xy &= x\left(3 + \frac{150}{x-2}\right) \\ &= x\frac{3x-6+150}{x-2} \\ &= \frac{3x^2+144x}{x-2} \end{aligned}$$

Conclusion

$$g(x) = \frac{3x^2+144x}{x-2}$$

3b Calculons $g'(x)$. g est un quotient donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(6x+144)(x-2)-(3x^2+144x)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{6x^2-12x+144x-288-3x^2-144x}{(x-2)^2} \\ &= \frac{3x^2-12x-288}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Conclusion

$$g'(x) = \frac{3x^2-12x-288}{(x-2)^2}$$

g' est du signe du numérateur puisque le dénominateur est un carrée, donc toujours positif. Le numéteur est un trinome du second degré.

$$N(x) = 3x^2 - 12x - 288 = 3(x^2 - 4x - 96)$$

Calculons le discriminant de l'équation $x^2 - 4x - 96 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-96) = 16 + 384 = 400 = 20^2$$

Les solutions sont de l'équation sont

$$x_1 = -8 \qquad x_2 = 12$$

Le trinome est négatif entre ses racines (puisque le coefficient de x^2 est positif). On en déduit le tableau de variation

x	5		12		22
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	25	$\searrow$	216	$\nearrow$	231

3c) La lecture du tableau de variation nous indique que l'aire est minimale ou pour $x = 12$, ce qui correspond à la valeur de x pour laquelle la dérivée s'annulle et change de signe. L'aire minimale est $g(12)$

$$g(12) = \frac{3 \times 12^2 - 144 \times 12}{12 - 2} = \frac{3 \times 144 + 1728}{10} = \frac{432 + 1728}{10} = \frac{2160}{10}$$

Conclusion : l'aire minimal est 216 cm^2 et est obtenue pour $x = 12$.

3d) Résolvons l'équation $g(x) = 224$

$$\begin{aligned} &\frac{3x^2 - 144x}{x - 2} = 224 \\ \iff &3x^2 + 144x = 224x - 448 \\ \iff &3x^2 - 80x + 448 = 0 \end{aligned}$$

A nouveau une équation du second degré à résoudre. Le discriminant est

$$\Delta = (-80)^2 - 4 \times 3 \times 448 = 1024$$

Les solutions sont donc

$$x_1 = \frac{-(-80) - \sqrt{1024}}{2 \times 3} = \frac{80 - 32}{6} = 8 \qquad x_2 = \frac{80 + 32}{6} = \frac{56}{3}$$

Conclusion : l'aire est égale 2̀24 cm^2 pour $x = 8$ ou $x = \frac{56}{3}$