Exercice - M0054C

On se place sur une droite munie d'une origine O. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives -4, 3 et 2. On considère un point M. On recherche la position de M pour que la somme des distances $AM + BM + CM$ soit minimale. Exprimons les différentes distances, en fonction des abscisses des points. On notera x l'abscisse du point M.

$$\begin{aligned} AM &= |x_M - x_A| = |x - (-4)| = |x + 4| \\ BM &= |x_M - x_B| = |x - 3| \\ CM &= |x_M - x_C| = |x - 2| \end{aligned}$$

Et donc la somme $AM + BM + CM$ s'écrit

$$s(x) = |x + 4| + |x - 2| + |x - 3|$$

Le problème revient à recherche le minimum de la fonction s. Il s'agit d'une fonction affine par morceau, comme nous allons le voir, ci-après. Nous avons :

$$x + 4 \geq 0 \implies x \geq -4 \qquad x - 2 \geq 0 \implies x \geq 2 \qquad x - 3 \geq 0 \implies x \geq 3$$

Donc

x	$-\infty$		-4		2		3		$+\infty$
$\lvert x+4\rvert$		$-x-4$	0	$x+4$	$\vert$	$x+4$	$\vert$	$x+4$	
$\lvert x-2\rvert$		$-x+2$	$\vert$	$-x+2$	0	$x-2$	$\vert$	$x-2$	
$\lvert x-3\rvert$		$-x+3$	$\vert$	$-x+3$	$\vert$	$-x+3$	0	$x-3$	
$s(x)$		$-3x+1$	$\vert$	$-x+9$	$\vert$	$x+5$	$\vert$	$3x-1$	

Nous en dédusions le tableau de variation

x	$-\infty$		-4		2		3		$+\infty$
$s(x)$		$-3x+1$	$\vert$	$-x+9$	$\vert$	$x+5$	$\vert$	$3x+3$	
$s(x)$	$+\infty$	$\searrow$	13	$\searrow$	7	$\nearrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Le calcul des images est le suivant

$$\begin{aligned} s(-4) &= |-4+4| + |-4-2| + |-4-3| = 0 + 6 + 7 = 13 \\ s(2) &= |2+4| + |2-2| + |2-3| = 6 + 0 + 1 = 7 \\ s(3) &= |3+4| + |3-2| + |3-3| = 7 + 1 + 0 = 8 \end{aligned}$$

Conclusion : la somme est minimale en plaçant le point M à l'abscisse 6.