Exercice - M0058C

Résolvons l'équation :

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-x-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-x-1}}=2$$

Posons

$$f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x^2-x-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-x-1}}$$

et recherchons le domaine de définition de f. On doit avoir

$$x^2-x-1\geq 0$$

La résolution est immédiate

$$\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-1)=5$$

Le discriminant est positif, il y a donc deux racines

$$x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\qquad x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Le trinome est positif à l'extérieur des racines donc

$$D_f\subset]-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty[$$

Nous devons également avoir

$$x-\sqrt{x^2-x-1}\geq 0$$

ce qui entraine immédiatement $x\geq 0$. Si on tente de résoudre l'inéquation, on obtient

$$\begin{aligned} x-\sqrt{x^2-x-1}&\geq 0\\ x\geq\sqrt{x^2-x-1}&\geq 0 x^2\geq x^2-x-1\\ x&\geq -1\end{aligned}$$

Ce qui n'apporte rien de plus. En conclusion :

$$D_f=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right[$$

Tentons de résoudre l'équation, par analyse synthèse. Supposons x solution. Il vient

$$\begin{aligned} &\sqrt{x-\sqrt{x^2-x-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-x-1}}=2\\ \Longrightarrow\ & x-\sqrt{x^2-x-1}+2\sqrt{x-\sqrt{x^2-x-1}}\sqrt{x+\sqrt{x^2-x-1}}+x+\sqrt{x^2-x-1}=4\\ \Longrightarrow\ & 2\sqrt{x^2-(x^2-x-1)}=4\\ \Longrightarrow\ & \sqrt{x+1}=2-x\\ \Longrightarrow\ & x+1=4-4x+x^2\\ \Longrightarrow\ & x^2-5x+3=0\end{aligned}$$

Equation du second degré que l'on résout immédiatement

$$\Delta=(-5)^2-4\times 1\times 3=25-12=13$$

Le discriminant est strictement positif, il y a deux solutions

$$r_1=\frac{5-\sqrt{15}}{2}\qquad r_2=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

La première racine n'est pas dans le domaine de définition, donc ne convient pas. Quant à la deuxième, il faut vérifier si c'est effectivement une racine. Calculons

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - \frac{5+\sqrt{13}}{2} - 1} = \\
&\sqrt{\frac{25+10\sqrt{13}+13}{4} - \frac{5+\sqrt{13}}{2} - \frac{2}{2}} = \\
&\sqrt{\frac{38+10\sqrt{5}}{4} - \frac{5+\sqrt{13}}{2} - \frac{2}{2}} = \\
&\sqrt{\frac{19+5\sqrt{5}}{2} - \frac{5+\sqrt{13}}{2} - \frac{2}{2}} = \\
&\sqrt{\frac{12+4\sqrt{5}}{2}} \\
&= \sqrt{6+2\sqrt{13}}
\end{aligned}$$

On peut alors calculer

$$f\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2} - \sqrt{6+2\sqrt{13}}} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2} + \sqrt{6+2\sqrt{13}}}$$

Qui a après un calcul laborieux ne donne pas 2. L'équation n'a donc pas de solution ! ! Ce type d'équation illustre le mode de raisonnement par analyse synthèse. On suppose x solution on en déduit alors une égalité permettant de trouver des valeurs de x candidate. Si x est solution les valeurs de x ne peuvent être que... Il reste ensuite à vérifier que les valeurs trouvées sont bien des solutions...