Exercice - M0067C

1) Calculons la dérivée de la fonction

$$f(x) = (2-x)\sqrt{x}$$

Il s'agit d'un produit donc

$$f'(x) = -1 \times \sqrt{x} + (2-x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-2x + (2-x)}{2\sqrt{x}}$$

Conclusion

$$f'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{x}}$$

Remarque : le domaine de défintion de f est $\mathbb{R}^+$ et le domaine de dérivabilité $R^{+\star}$.

2) Calculons la dérivée de la fonction

$$f(x) = (x^2-1)(3x^2+2x-5)$$

La fonction est un produit

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(3x^2+2x-5) + (6x+2)(x^2-1) \\ &= 6x^3 + 4x^2 - 10x + 6x^3 - 6x + 2x^2 - 2 \\ &= 12x^3 + 6x^2 - 16x - 2 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 16x - 2$$

Remarque : le domaine de d'efinition est $\mathbb{R}$ de même que le domaine de dérivabilité.

Remarque : sous cette forme l'étude du signe de la dérivée n'est pas commode. Il est préférable de la factoriser. On peut alors remarquer que 1 annule la dérivée et donc que $(x-1)$ peut être mis en facteur. Il vient alors

$$f'(x) = (x-1)(6x^2+9x+1)$$

L'étude du signe est alors ramenée à l'etude du signe d'une fonction affine et d'un trinome du second degré ce qui est trivial !

3) Calculons la dérivée de la fonction

$$f(x) = (x^3-3x+1)^2$$

Il s'agit d'un carré que l'on peut considéré comme un produit ou comme une puissance.

$$f'(x) = 2(x^3-3x+1)(3x^2-3)$$

Conclusion

$$f'(x) = 6(x^3-3x+1)(x^2-1)$$

Remarque : Faut-il aller plus loin dans le calcul ? On peut évidement tout développer ce qui conduit à

$$f'(x) = 6x^5 - 24x^3 + 6x^2 + 18x - 6$$

Mais cette derni'ere forme ne facilite pas l'étude du signe. Le résultat donné en conclusion est préférable. L'étude du signe du premier facteur nécessite un étude complète. Le deuxième est aisé, c'est un trinome du second degré.

Remarque : le domaine de définition est $\mathbb{R}$ de même que le domaine de dérivabilité.

4) Calculons la dérivée de la fonction

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6x}{x^2 - x + 3}$$

Il s'agit d'un quotient.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(6x-6)(x^2-x+3) - (2x-1)(3x^2-6x)}{(x^2-x+3)^2} \\
&= \frac{6x^3 - 6x^2 + 18x - 6x^2 + 6x - 18 - (6x^3 - 12x^2 - 3x^2 + 6x)}{(x^2-x+3)^2} \\
&= \frac{6x^3 - 6x^2 + 18x - 6x^2 + 6x - 18 - 6x^3 + 12x^2 + 3x^2 - 6x)}{(x^2-x+3)^2} \\
&= \frac{3x^2 + 18x - 18)}{(x^2-x+3)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 6x - 6)}{(x^2-x+3)^2}$$

Remarque : le discriminant du dénominateur est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -11$. Il est négatif, donc le dénominateur ne s'annulle pas. On en déduit que le domaine de définition est $\mathbb{R}$ de même que le domaine de érivabilité.

L'étude du signe se ramène à l'étude du signe du numérateur c'est-à-dire d'un trinome du second degré.