Exercice - M0068C

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Déterminons l'équation de la tangente à la courbe représentative au point A d'abscisse $a = -1$.

Calculons les coordonnées du point A.

$$f(a) = f(-1) = -(-1)^4 + 2 \times (-1)^2 + (-1) = 0 \qquad A(a; f(a)) \qquad A(-1; 0)$$

Calulculons le nombre dérivé en $a = -1$.

$$f'(x) = -4x^3 + 4x + 1 \qquad f'(-1) = -4 \times (-1)^3 + 4 \times (-1) + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$$

Nous en déduisons l'équation de la tangente.

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(1) = x + 1$$

Conclusion : la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse -1 est la droite Δ d'équation

$$y = x + 1$$

2 Montrons que la droite Δ est aussi tangente à la courbe en un autre point.

Méthode 1 : Recherchons les points d'intersection de la droite Δ et de la courbe $\mathcal{C}$, puis vérifions que Δ est tangente. L'intersection de la courbe et de la tangente conduit à l'équation

$$-x^4 + 2x^2 + x = x + 1 \iff -x^4 + 2x^2 - 1 = 0 \iff (x^2 - 1)^2 = 0 \iff x = 1 \quad \text{ou} x = -1$$

Nous retrouvons évidement $x = -1$ qui correspond au point A et un autre point B d'abscisse $b = 1$. Calculons le nombre dérivé en B.

$$f'(1) = -4 \times 1^3 + 4 \times 1 + 1 = 1$$

Le coefficient directeur de Δ et le nombre dérivé sont égaux, la droite Δ est tangente à la courbe au point B.

Méthode 2 : Le coefficient directeur de la droite Δ est 1. On recherche donc les points de $\mathcal{C}$ ou le coefficient directeur est 1. Puis, on détermine l'équation de la tangente en ces ou points ou plus simplement, on vérifie que les points trouvé appartiennent à la droite Δ. Commençons par résoudre l'équation

$$f'(x) = 1 \iff -4x^3 + 4x + 1 = 1 \iff 4x(x^2 - 1 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 1$$

La encore on retrouve $x = -1$ qui correspond au point A ; et deux autres points B et C d'abscisse respective 1 et 0. Calculons les coordonnées des points trouvé et vérifions qu'il appartiennent à Δ.

$$f(0) = 0 \implies C(0; 0) \implies C \notin \Delta \qquad 0 \neq 0 + 1 \qquad y_C \neq x_C + 1$$

$$f(1) = -1^4 + 2 \times 1^2 + 1 = 2 \implies B(1; 2) \implies B \in \Delta \qquad 2 = 1 + 1(y_B = x_B + 1)$$

Conclusion : les deux méthodes sont sensiblement équivalente. Nous trouvons que la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 et également tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.