Exercice - M0072C

1) Montrons que les triangles ABK et DKM ont la même forme. Les angles $\widehat{AKB}$ et $\widehat{DKM}$ sont opposés par le sommet et donc égaux. Le polygone $ABCD$ est un rectangle, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Les angles $\widehat{ABK}$ et $\widehat{KDM}$ sont alternes-Internes et donc égaux (puis $(AB)//(CD)$. Il en est de même pour les angles $\widehat{BAK}$ et $\widehat{DKM}$. En résumé

$$\widehat{AKB} = \widehat{DKM} \qquad \widehat{ABK} = \widehat{KDM} \qquad \widehat{BAK} = \widehat{DKM}$$

Nous avons par ailleurs

$$AB = 1 \qquad \text{et} \qquad DM = x$$

Conclusion : les triangles ABK et MDK sont semblables et le coefficient de réduction est donc x.

2) Le coefficient de réduction du triangle DKM par rapport au triangle ABK est x donc

$$LK = 2 - h \quad KH = h \quad \text{et} \quad xLK = KH \implies x(2-h) = h$$

Alternativement, nous pouvons utiliser le théorème de Thales. Les droites (BD) et AM sont sécantes en K. Les droites (AB) et (DM) sont parallèles. D'après le théorème de Thales

$$\frac{KD}{KB} = \frac{KM}{KA} = \frac{DM}{AB} = x$$

De même, les droites (BD) et (LH) sont sécantes en K. Les droites (AB) et (DH) sont parallèles. D'après le théorème de Thales

$$\frac{KD}{KB} = \frac{KH}{KL} = \frac{DH}{LB} = x$$

d'ou

$$xKL = KH \implies x(2-h) = h$$

On retrouve donc la même relation entre x et h.

$$x(2-h) = h$$

3) Calculons x en fonction de h. En isolant h, il vient

$$x(2-h) = h \iff 2x - xh = h \iff 2x = (1+x)h \iff h = \frac{2x}{1+x}$$

Conclusion

$$h = \frac{2x}{1+x}$$

4) Calculons l'aire de la zone hachurée. La zone est composée de deux triangles dont nous ajoutons les aires.

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1}{2}AB \times LK + \frac{1}{2}DM \times HK \\
&= \frac{1}{2} \times 1 \times (2-h) + \frac{1}{2}xh \\
&= 1 + \frac{h}{2}(x-1) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\frac{2x}{x+1}(x-1) \\
&= \frac{x+1+x^2-x}{x+1} \\
&= \frac{x^2+1}{x+1}
\end{aligned}$$

Conclusion

$$A(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

5) Etudions les variations de $A(x)$.

$$A'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

Conclusion :

$$A'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

A' est du signe du trinome du second degré $x^2 + 2x - 1$, dont le discriminant et les racines sont :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 = (2\sqrt{2})^2$$

D'ou les deux racines

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2} \qquad x_2 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}$$

Donc $A'(x)$ est négatif entre les racines x_1 et x_2. On en déduit immédiatement le tableau de variation de $A(x)$ sur l'intervalle $[0;1]$. Une fois calculées les valeurs particulières

$$\begin{aligned}
A(0) &= \frac{0^2+1}{0+1} = 1 \\
A(1) &= \frac{1^2+1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \\
A(\sqrt{2}-1) &= \frac{(\sqrt{2}-1)^2+1}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{2-2\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}-2
\end{aligned}$$

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$A'(x)$		$-$	0	$+$	
$A(x)$	1	$\searrow$	$2\sqrt{2}-2$	$\nearrow$	1

6) Nous en déduisons que l'aire de la zone hachurée est minimale pour $x = \sqrt{2} - 1$. L'aire de la zone est alors $2\sqrt{2} - 2$.