

Exercice - M0080C

1) Nous avons

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DI} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AJ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}\end{aligned}$$

En résumé

$$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \quad \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

Et donc

$$\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$$

Conclusion : Les vecteurs \overrightarrow{DE} et \overrightarrow{DI} sont colinéaires. Les points D, E et I sont alignés.

2) Nous avons

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{DK} &= \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{JC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

En résumé

$$\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} \quad \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

Et donc

$$\overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DF}$$

Conclusion : les vecteurs \overrightarrow{DK} et \overrightarrow{DF} sont colinéaires. Les points D, K et F sont alignés.

3a) Les droites (IE) et (FK) sont sécantes en D .

3b) Les I, E, F et K sont coplanaires.