Exercice - M0081C

$ABCD$ est un parallélogramme. Soit I et J tels que :

$$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AD} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

1a) Montrons que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BD}$. Utilisation de Chasle dans la première égalité.

$$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AD} \implies \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{AD}$$

Donc

$$\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$$

Or $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. Il vient alors

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$$

Conclusion

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BD}$$

1b) Montrons maintenant que $\overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{BD}$. Utilisation la relation de Chasle dans la deuxième égalité

$$\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \implies \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

On a alors

$$\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$$

Or $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Il vient alors

$$\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}) = 2\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{BD}$$

Conclusion

$$\overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{BD}$$

2) Montrons que C, I et J sont alignés. Nous avons d'après les questions précédentes

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BD} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{BD}$$

Donc

$$\overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{CI}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont colinéaires.

Conclusion : les points C, I et J sont alignés.