Exercice - M0082C

Soit un triangle équilatéral A, B, C de coté 5cm et G son centre d'inertie. Calculer :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \quad \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} \quad \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Calculons

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \times 5 \times \cos\frac{\pi}{3} = 25 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

Conclusion

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

Calculons $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}$. Pour cela introduisons H le pied de la hauteur issue de C. Il vient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} &= (\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA}) \cdot (\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HB}) \\
&= \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} \\
&= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CH}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CH}\right) + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \frac{1}{9}\|\overrightarrow{CH}\|^2 - \frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\|^2 \\
&= \frac{1}{9}\left(AC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2\right) - \frac{AB^2}{4} \\
&= \frac{AC^2}{9} - \frac{AB^2}{36} - \frac{AB^2}{4} \\
&= \frac{4AC^2 - AB^2 - 9AB^2}{36} \\
&= \frac{4AC^3 - 10AB^2}{36} \\
&= -\frac{6AB^2}{36} \\
&= -\frac{AB^2}{6}
\end{aligned}$$

Ceci étant, c'est finalement plus simple d'utiliser la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$. En effet, les angles se calculent facilement à l'aide d'un dessin, en se rappelant que la somme des angles du triangle qui donne π et que dans le triangle équilatéral, les hauteurs, les médiane, les médiatrices et les bisectrices coincident.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} &= \|\overrightarrow{GA}\| \cdot \|\overrightarrow{GB}\| \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) \\
&= GA \times GB \cos\frac{2\pi}{3} = GA^2 \cos\frac{2\pi}{3} \\
&= \left(\frac{AH}{\cos\frac{\pi}{6}}\right)^2 \cos\frac{2\pi}{3} = \left(\frac{\frac{AB}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{AB^2}{3} \times \frac{1}{2} = -\frac{AB^2}{6}
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = -\frac{25}{6}$$

Calculons $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AG}\|\|\overrightarrow{AC}\| \cos(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}) = AC \times AG \cos\frac{\pi}{3}$$

L'angle $\cos(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC})$ se calcul facilement et vaut $\dfrac{\pi}{6}$. Il vient alors

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = AC \cdot AH = AC\frac{AB}{2} = \frac{AB^2}{2}$$

Conclusion :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{25}{2}$$

Remarque : Alternativement, on peut travailler en coordonnée dans un repère orthonormé tel $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que O coincide avec le point A et $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i}$. On a alors les coordonnées suivantes des points

$$A(0;0) \qquad B(5;0) \qquad C\left(\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) \qquad G\left(\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$$

On calcul aisément les coordonnées des différents vecteurs et on utlise la formule

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \qquad \vec{u}(x;y) \qquad \vec{v}(x';' y)$$