Exercice - M0083C

Plusieurs solutions sont proposées. Afin d'alléger la rédaction posons

$$a = BC \qquad b = AC \qquad c = AB \qquad x = BH \qquad y = CH \qquad h = AH \qquad \hat{C} = \widehat{ACB}$$

Solution 1) : Avec le produit scalaire

On écrit de deux façons différente le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{CA}\|^2 + 0 = CA^2$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ est nul car les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CB \times CH$$

C'est l'interpétration géométrique du produit scalaire, qui résulte de

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\| \cdot \|\overrightarrow{CB}\| \cos \hat{C} = CA \times CB \cos \hat{C} = CB \times CA \cos \hat{C} = CB \times CH$$

En effet, un peu de trigonométrie dans le triangle AHC rectangle en H donne

$$CA \cos \hat{C} = CH$$

d'ou le résultat. En rapprochant les deux expressions du produit scalaire,

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA^2 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CB \times CH$$

Nous obtenons

$$CB \times CH = CA^2$$

Solution 2) : avec Pythagore.

Le triangles BAC est rectangle en A, AHB et AHC sont rectangles en H. Le théorème de Pythagore donne

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \implies a^2 = b^2 + c^2$$

Or, appliquant le théorème de Pythagore aux deux autres triangles, on a

$$b^2 = y^2 + h^2 \qquad c^2 = x^2 + h^2 \qquad a^2 = (x+y)^2$$

Donc

$$x^2 + h^2 + y^2 + h^2 = (x+y)^2 \implies x^2 + y^2 + 2h^2 = x^2 + y^2 + 2xh \implies h^2 = xy$$
$$CB \times CH = (x+y)y = xy + y^2 = h^2 + y^2 = AC^2$$

Solution 3) : avec la trigonométrie

On exprime le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$ dans les triangles rectangles BAC et AHC.

$$\cos \hat{C} = \frac{AC}{CB} \qquad \cos \hat{C} = \frac{CH}{CA} \implies \frac{AC}{CB} = \frac{CH}{CA}$$

Un simple produit en croix permet de conclure

$$CB \times CH = CA^2$$

Solution 4) : avec les triangles semblables

En se rappelant que la somme des angles d'un triangle donne π, on montre facilement que les triangles BAC, AHB et AHC sont semblables. On a alors

$$\frac{AH}{AB} = \frac{CH}{CA} = \frac{CA}{CB}$$

Ici encore un simple produit en croix permet de conclure.