Exercice - M0084C

1) Déterminons les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire les coordonnées du point de concours des médiatrice. Déterminons donc l'équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$ et de la médiatrice de $[BC]$.

La médiatrice de $[AB]$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par I le milieu de $[AB]$, autrement dit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normale de la droite. Le calcul des coordonnée de I et du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est immédiat.

$$I\left(-\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right) \qquad \overrightarrow{AB}(1;-7)$$

Soit M un point de la droite, alors les vecteur $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. Leur produit scalaire est nul.

$$\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = \left(x-\frac{-7}{2}\right)\times 1 + \left(y-\frac{3}{2}\right)\times(-7) = x - 7y + \frac{7}{2} + \frac{21}{2} = 0$$

Léquation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$ est donc

$$x - 7y + 14 = 0$$

La médiatrice de $[BC]$ est la droite perpendiculaire à (BC) passant par J le milieu de $[BC]$, autrement dit le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normale de la droite. Le calcul des coordonnée de I et du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est immédiat.

$$J(1;0) \qquad \overrightarrow{BC}(8;4)$$

Soit M un point de la droite, alors les vecteur $\overrightarrow{JM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. Leur produit scalaire est nul.

$$\overrightarrow{JM}\cdot\overrightarrow{AB} = 8(x-1) + 4(y-0) = 8x + 4y - 8 = 0$$

Léquation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$ est donc

$$2x + y - 2 = 0$$

Déterminons le point d'intersection des deux droites. Résolvons donc le système

$$\left\{\begin{array}{llr} x & -7y & =-14 \\ 2x & +y & =2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{llr} -2x & +7y & =28 \\ 2x & +y & =2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{llr} & 15y & =30 \\ 2x & +\ y & =2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y=2 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Conclusion : les coordonnées de l'orthocentre H sont $H(0;2)$

2) Soit M un point du cercle circonscrit. On alors $HM = HC$. Il vient

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 = (5-0)^2 + (2-2)^2 = 25 \iff x^2 + y^2 - 4Y + 4 - 25 = 0$$

Conclusion : l'équation cartésienne du cercle circonscrit du triangle ABC est

$$x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$$