Exercice - M0096C

Soit f une fonction d'une variable réelle 2π périodique telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$.

1)Décomposons la fonction f en série de Fourrier. Calculons donc les coefficients de Fourrier. Le calcul de a_0 est immédiat. Le domaine d'intégration peut être réduit compte-tenu de la parité de f.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} t^2 \text{ d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \text{ d}t = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t^2 \text{ d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

Calculons les autres coefficients. La fonction f étant paire, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad b_n = 0$. Calculons a_n.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T}^{T} t^2 cos(nt) \text{ d}t = \frac{4}{T}\int_{0}^{T} t^2 \cos(nt) \text{ d}t$$

Deux intégrations par partie successives devraient permettre de s'en sortir.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt) \text{ d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[t^2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{t} \frac{2t}{n}\sin(nt) \text{ d}t\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\pi^2\frac{\sin(n\pi)}{n} - \int_0^{\pi} \frac{2t}{n}\sin(nt) \text{ d}t\right) \\
&= \frac{4}{n\pi}\left(-\int_0^{\pi} t\sin(nt) \text{ d}t\right) \\
&= \frac{4}{n\pi}\left(-\left[t\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos(nt)}{n} \text{ d}t\right) \\
&= \frac{4}{n\pi}\left(\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos(nt) \text{ d}t\right) \\
&= \frac{4}{n\pi}\left(\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{4}{n\pi}\left(\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} + 0\right) \\
&= \frac{4\pi(-1)^n}{n^2\pi} \\
&= \frac{4(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : les coefficients de Fourrier sont :

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} \qquad b_n = 0$$

et la série de Fourrier

$$S(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

2) Déduisons $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. La fonction t^2 est de classe C^1. La fonction f est donc de classe C^1 sauf aux points $x_k = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. De plus f est continue. En effet

$$\lim_{x\to x_k^-} t^2 = \lim_{x\to\pi^-} t^2 = \pi^2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_k^+} t^2 = \lim_{x\to\pi^+} t^2 = \pi^2$$

donc

$$\lim_{x\to x_k} t^2 = \pi^2$$

D'après le théorème de Dirichlet, il y a convergence de la série de Fourrier vers $f(t)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{n}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kt)\right)=f(t)$$

Pour $t=\pi$ on obtient

$$f(\pi)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi)$$

d'ou

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n$$

$$\pi^2-\frac{\pi^2}{3}=4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^2}$$

$$4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{2\pi^2}{3}$$

Conclusion

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$