Exercice - M0103

On considère les suites (u_n) et (v_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad v_n = \frac{2}{u_n}$$

1. Calculer $v_0; u_1; v_1; u_2; v_2$. Donner les résultats sous forme de fraction irréductible.
2. Etablir un tableau des valeurs décimales de u_n et v_n pour n compris entre 1 et 5.
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont majorées par 2 et minorée par 1.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \quad (1)$
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \qquad u_n \geq v_n$.
6. Montrer que (u_n) est décroissante et (v_n) croissante.
7. Montrer que que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n - v_n \leq 1$ et en déduire que $(u_n - v_n)^2 \leq u_n - v_n \quad (2)$.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(u_n - v_n)$. (on pourra utiliser les relations (1) et (2)). En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \quad u_n - v_n \leq \dfrac{1}{4^n}$.
9. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles ont même limite ℓ. Une suite convergente de nombres rationnels a-t-elle pour limite un nombre rationnel ?