Exercice - M0103C

On considère les suites (u_n) et (v_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad v_n = \frac{2}{u_n}$$

1) Calculons les premiers termes de la suite

$$u_0 = 2 \quad v_0 = \frac{2}{u_0} = \frac{2}{2} = 1$$
$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \qquad v_1 = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$
$$u_2 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{\frac{17}{6}}{2} = \frac{17}{12} \qquad v_2 = \frac{24}{17}$$

2) On obtient les valeurs suivantes

n	u_n	v_n
0	2	1
1	$1,5$	$1,333333333$
2	$1,416666667$	$1,411764706$
3	$1,414215686$	$1,414211438$
4	$41,414213562$	$1,414213562$
5	$1,414213562$	$1,414213562$

3) Montrons que pour tout n, u_n et v_n sont compris entre 1 et 2. Procédons par réccurence. Pour $n = 0$, nous avons $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$ et donc u_0 et v_0 sont compris entre 1 et 2. Supposons que nous ayons

$$1 \leq u_n \leq 2 \quad \text{et} \quad 1 \leq v_n \leq 2$$

Montrons que

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2 \quad \text{et} \quad 1 \leq v_{n+1} \leq 2$$

En additionnant membre à membre il vient

$$2 \leq u_n + v_n \leq 4$$

et en divisant par 2

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

Nous avons encore

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_{n+1}} \leq 1$$

et finalement en multipliant par 2

$$1 \leq v_{n+1} \leq 2$$

La propriété est donc héréditaire et nous pouvons conclure

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 \leq u_n \leq 2 \quad \text{et} \quad 1 \leq v_n \leq 2$$

4) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2}{\frac{u_n + v_n}{2}} \\
&= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{4}{u_n + v_n} \\
&= \frac{(u_n + v_n)^2 - 8}{2(u_n + v_n)} \\
&= \frac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2 - 4u_nv_n}{2(u_n + v_n)} \qquad \text{car } u_nv_n = 2 \\
&= \frac{u_n^2 - 2u_nv_n + v_n^2}{2(u_n + v_n)} \\
&= \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

5) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq v_n$. Procédons à nouveau par réccurence. C'est vrai pour $n = 0$ puisque $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$. Supposons que $u_n \geq v_n$. L'hérédité est immédiate compte-tenu de l'égalité démontrée à la question 4). u_n et v_n étant positifs, $u_{n+1} - v_{n+1}$ est positif ce qui démontre que $u_{n+1} \geq v_{n+1}$. Nous pouvons donc conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \geq v_n$$

6) Montrons que (u_n) est décroissante et (v_n) croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2}$$

or $u_n \geq v_n$ donc $v_n - u_n \leq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

$$u_{n+1} \leq u_n \implies \frac{1}{u_{n+1}} \geq \frac{1}{u_n} \implies v_{n+1} \geq v_n$$

La suite (v_n) est donc croissante.

Conclusion : la suite (u_n) est décroissante et la suite (v_n) croissante.

7) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n - v_n \leq 1$

$$u_n - v_n - 1 = u_n - \frac{2}{u_n} - 1 = \frac{u_n^2 - u_n - 2}{u_n}$$

Le dénominateur est positif. Le numérateur est un trinome du second degré. -1 est racine évidente. La deuxième racine est donc 2 et le trinome est négatif entre les racines. Or u_n est compris entre 1 et 2 pour tout n donc compris entre les racines. Donc

$$u_n^2 - u_n - 2 \leq 0$$

et donc

$$u_n - v_n - 1 \leq 0$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n - v_n \leq 1$$

Nous en déduisions, puisque $u_n - v_n \geq 0$ que

$$(u_n - v_n)((u_n - v_n) \leq (u_n - v_n)$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n - v_n \leq 1 \quad \text{et} \quad (u_n - v_n)^2 \leq u_n - v_n$$

8) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{4}(u_n - v_n)$. Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

et les deux inégalités suivantes. D'une part,

$$(u_n - v_n)^2 \leq u_n - v_n$$

d'autre part

$$1 \leq u_n \text{ et } 1 \leq v_n \implies 2 \leq u_n + v_n \implies \frac{1}{u_n + v_n} \leq \frac{1}{2}$$

Donc

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leq \frac{u_n - v_n}{2(u_n + v_n)} \leq \frac{u_n - v_n}{4}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - v_n)$$

Nous en déduisons, par une réccurence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N} \quad u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$. En effet, nous avons déjà $u_0 - v_0 = 2 - 1 = 1 \leq 1$, ce qui nous assure l'exactitude de la propriété pour $n = 0$. Supposons que $u_n - v_n \leq \dfrac{1}{4^n}$ montrons que $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{4^{n+1}}$.

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{4}(u_n - v_n) \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}$$

et nous pouvons conclure

$$n \in \mathbb{N} \quad u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$$

9) Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles ont même limite. D'après la question 3), la suite (u_n) est minorée par 1 et est décroissante. Elle est donc convergence. Soit ℓ_u sa limite. De même, la suite (v_n) est majorée par 2 et est croissante. Elle est donc convergente. Soit ℓ_v sa limite. Par ailleurs, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n - \lim_{n \to +\infty} v_n \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4^n}$$

et donc

$$\ell_u - \ell_v = 0$$

Conclusion : Le suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont une limite commune ℓ.

Nous avons encore

$$v_n = \frac{2}{u_n} \implies u_n v_n = 2 \implies \lim_{n \to +\infty} u_n v_n = \lim_{n \to +\infty} u_n \lim_{n \to +\infty} v_n = 2$$

donc

$$\ell^2 = 2$$

Conclusion :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n - \lim_{n \to +\infty} v_n = \sqrt{2}$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont des suites de rationnels. C'est immédiat par réccurence. u_0 et v_0 sont rationnels, et si u_n et v_n sont rationnels u_{n+1} et v_{n+1} le sont aussi, donc tous les termes des suites (u_n) et (v_n) sont rationnels. En revanche, la limite $\sqrt{2}$ est irrationnelle.

Remarque : plus généralement, la suite réccurente définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Convergence vers $\sqrt{a}$. Le calcul des termes successif correspond à l'algorithme de Babylone.