Exercice - M0108C

Un club de sport propose deux types d'abonnement non permutables.

Formule A : une cotisation annuelle de 500 F à laquelle s'ajoute la première anneée seulement un droit d'entrée de 10 000 F.

Formule B : une cotisation initiale de 1 000 F qui augmente de 10% par an. Dès la seconde année, pour fidéliser la clientèle, on effectue une réduction de 50 F sur la cotisation annelle. Si C_n, est le montant, exprmié en francs, de la cotisation annuelle la n-ième année, on a $C_1 = 1000$, er pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $C_{n+1} = 1,1C_n - 50$

1) Calculons le total des cotisations d'un membre qui choisit la formule A

$$T_n = 10\ 000 + 500n$$

2) Soit (D_n) un suite définie par $D_n = C_n + \alpha$. Déterminions α pour que (D_n) soit géométrique.

$$D_{n+1} = C_{n+1} + \alpha = 1,1C_n - 50 + \alpha = 1,1\left(C_n + \frac{\alpha - 50}{1,1}\right)$$

Mais (D_n) doit être géométrique donc

$$D_{n+1} = 1,1D_n = 1,1(C_n + \alpha)$$

On en déduit

$$1,1(C_n + \alpha) = 1,1\left(C_n + \frac{\alpha - 50}{1,1}\right)$$

Equation en α qui se résout aisément, en simplifiant par 1,1 puis par C_n de chaque coté

$$\alpha = \frac{\alpha - 50}{1,1} \implies 1,1\alpha - \alpha = -50 \implies 0,1\alpha = -50 \implies \alpha = -500$$

On en déduit

$$D_1 = C_1 - 500 = 1\ 000 - 500 = 500$$

Conclusion : en prenant $\alpha = -500$ la suite (D_n) est une suite géométrique de raison 1,1 et de premier terme $D_1 = 500$

3a) On en déduit immédiatement l'expression de D_n et C_n en fonction de n

$$D_n = D_1 q^{n-1} = 500 \times (1,1)^{n-1} \qquad C_n = D_n - \alpha = 500(1,1)^{n-1} - (-500)$$

Conclusion : pour tout entier n supérieur ou égal à 1

$$C_n = 500(1,1)^{n-1} - 500 \qquad \text{et} \qquad D_n = 500 \times (1,1)^{n-1} + 500$$

3b) Calculons S_n la somme versée au bout de n année

$$S_n = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

et donc

$$\begin{aligned} S_n &= (500(1,1)^0 + 500) + 500(1,1)^1 + 500 + \cdots + 500(1,1)^{n-1} + 500 \\ &= 500(1 + 1,1 + 1,1^2 + \cdots + 1,1^{n-1}) + 500n \end{aligned}$$

On reconnait la somme des q^n avec $q = 1,1$. Donc

$$S_n = 500\frac{1 - (1,1)^n}{1 - 1,1} + 500n = -5000(1 - (1,1)^n) + 500n$$

Conclusions :

$$S_n = 5000\left[(1,1)^n - 1\right] + 500n$$

3c) On recherche le nombre d'année au bout duquel on a $T_n \leq S_n$

$$\begin{aligned}
S_n \geq T_n &\iff 5000\,[(1,1)^n - 1] + 500n \geq 10\ 000 + 500n \\
&\iff 5000 \times (1,1)^n - 5000 \geq 10\ 000 \\
&\iff 5000 \times (1,1)^n \geq 10\ 000 + 5000 \\
&\iff 5000 \times (1,1)^n \geq 15\ 000 \\
&\iff (1,1)^n \geq \frac{15\ 000}{5000} \\
&\iff (1,1)^n \geq 3 \\
&\iff \ln((1,1)^n) \geq \ln(3) \\
&\iff n \ln(1,1) \geq \ln(3) \\
&\iff n \geq \frac{\ln(3)}{\ln(1,1)}
\end{aligned}$$

Numériquement $n = 12$.