Exercice - M0125C

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. Montrons que

$$\ker f = \ker f^2 \iff \ker f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$$

Supposon que $\ker f = \ker f^2$. Montrons que $\ker f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$.

$$y \in \ker f \cap \text{Im } f \implies f(y) = 0 \quad \text{et} \quad y = f(x) \quad x \in E$$

Donc

$$f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0$$

et donc x est dans le noyau de f^2. On a alors

$$x \in \ker f^2 \implies x \in \ker f \implies f(x) = 0_E \implies y = 0_E$$

Donc

$$\ker f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$$

Réciproquement, supposons $\ker f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$. Montrons que $\ker f = \ker f^2$. On a déjà trivialement

$$\ker f \subset \ker f^2$$

En effet, f est un endomorphisme et donc $f(0_E) = 0_E$, d'ou

$$x \in \ker f \implies f(x) = 0 \implies f(f(x)) = 0 \implies f^2(x) = 0 \implies x \ker f^2$$

Montrons la deuxième inclusion

$$x \in \ker f^2 \implies f^2(x) = 0_E \implies f(f(x)) = 0_E \implies f(x) \in \ker f \cap \text{Im } f \implies f(x) = 0_E \implies x \in \ker f$$

et donc

$$ker f \cap \text{Im } f = \{0_E\} \implies \ker f = \ker f^2$$

Conclusion

$$\ker f = \ker f^2 \iff \ker f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$$

Montrons maintenant que

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff E = \ker f + \text{Im } f$$

Supposons $E = \ker f + \text{Im } f$. Montrons que $\text{Im } f = \text{Im } f^2$. Nous avons déjà $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$. En effet

$$y \in \text{Im } f^2 \implies y = f^2(x) = f(f(x)) \implies y \in \text{Im } f$$

Montrons maintenant la deuxième inclusion.

$$y \in \text{Im } f \implies y = f(x) \quad x \in E$$

D'après l'hypothèse

$$x = u + w \qquad u \in \ker f \quad w \in \text{Im } f$$

Or

$$w \in \text{Im } f \implies w = f(v) \quad v \in E$$

Donc

$$x = u + f(v)$$

et finalement

$$y = f(x) = f(u + f(v)) = f(u) + f(f(v)) = 0_E + f^2(v) = f^2(v) \implies y \in \text{Im } f^2$$

d'ou

$$E = \ker f + \text{Im } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2$$

Réciproquement, supposons que $\text{Im } f = \text{Im } f^2$. Montrons que $E = \ker f + \text{Im } f$

$$x \in E \implies f(x) \in \text{Im } f \implies f(x) \in \text{Im } f^2 \implies f(x) = f^2(y) \qquad y \in E$$

On a donc

$$f(x) - f^2(y) = f(x - f(y)) = 0 \implies x - f(y) \in \ker f$$

Or

$$x = (x - f(y)) + f(y) \qquad x - f(y) \in \ker f \quad \text{et} \quad f(y) \in \text{Im } f$$

Donc

$$E = \ker f + \text{Im } f$$

Et donc

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \ker f + \text{Im } f$$

Conclusion

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff E = \ker f + \text{Im } f$$