Exercice - M0134C

Calculons la dérivée de f. Nous avons

$$f(x) = (x-2)^2 - 1 \qquad f'(x) = 2x - 4$$

Considérons une tangente à la courbe repréntative de f au point d'abscisse a. L'équation de la tangente est

$$y = 2(a-2)(x-a) + (a-2)^2 - 1$$

Soit encore

$$y = 2(a-2)x + (a-2)(-2a + a - 2) - 1$$

Et finalement

$$y = 2(a-2)x - (a-2)(a+2) - 1$$

De même, calculons la dérivée de la fonction g. Nous avons :

$$g(x) = -(x+2)^2 + 1 \qquad g'(x) = -2x - 4$$

Considérons maintenant une tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse b. L'équation de la tangente est

$$y = -2(b+2)(x-b) - (b+2)^2 + 1$$

Soit encore

$$y = -2(b+2)x + (b+2)(2b - (b+2)) + 1$$

Et finalement

$$y = -2(b+2)x + (b+2)(b-2)) + 1$$

La tangente est commune si et seulement les deux équations de tangente représentent la même droite. Autrement dit

$$\left\{\begin{array}{rl} 2(a-2) = & -2(b+2) \\ -(a-2)(a+2) - 1 = & (b+2)(b-2)) + 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} 2a - 4 = & -2b - 4 \\ -(a-2)(a+2) - 1 = & (b+2)(b-2)) + 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} a = & -b \\ -(a-2)(a+2) - 1 = & (-a+2)(-a-2)) + 1 \end{array}\right.$$

La dernière équation nous donne

$$-a^2 + 4 - 1 = a^2 - 4 + 1 \iff 2a^2 = 6 \iff a = \sqrt{3} \qquad \text{ou} \qquad a = -\sqrt{3}$$

Nous en déduisons l'équations des deux tangentes

$$y = 2(\sqrt{3} - 2)x - (\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2) - 1 = 2(\sqrt{3} - 2)x - 3 + 4 - 1 = 2(\sqrt{3} - 2)x$$

$$y = 2(-\sqrt{3} - 2)x - (-\sqrt{3} - 2)(-\sqrt{3} + 2) - 1 = -2(\sqrt{3} + 2)x - 3 + 4 - 1$$

Donc, les équations sont

$$y = 2(\sqrt{3} - 2)x \qquad \text{et} \qquad y = -2(\sqrt{3} + 2)x$$

2) Tracons les deux courbes et les tangentes communes...

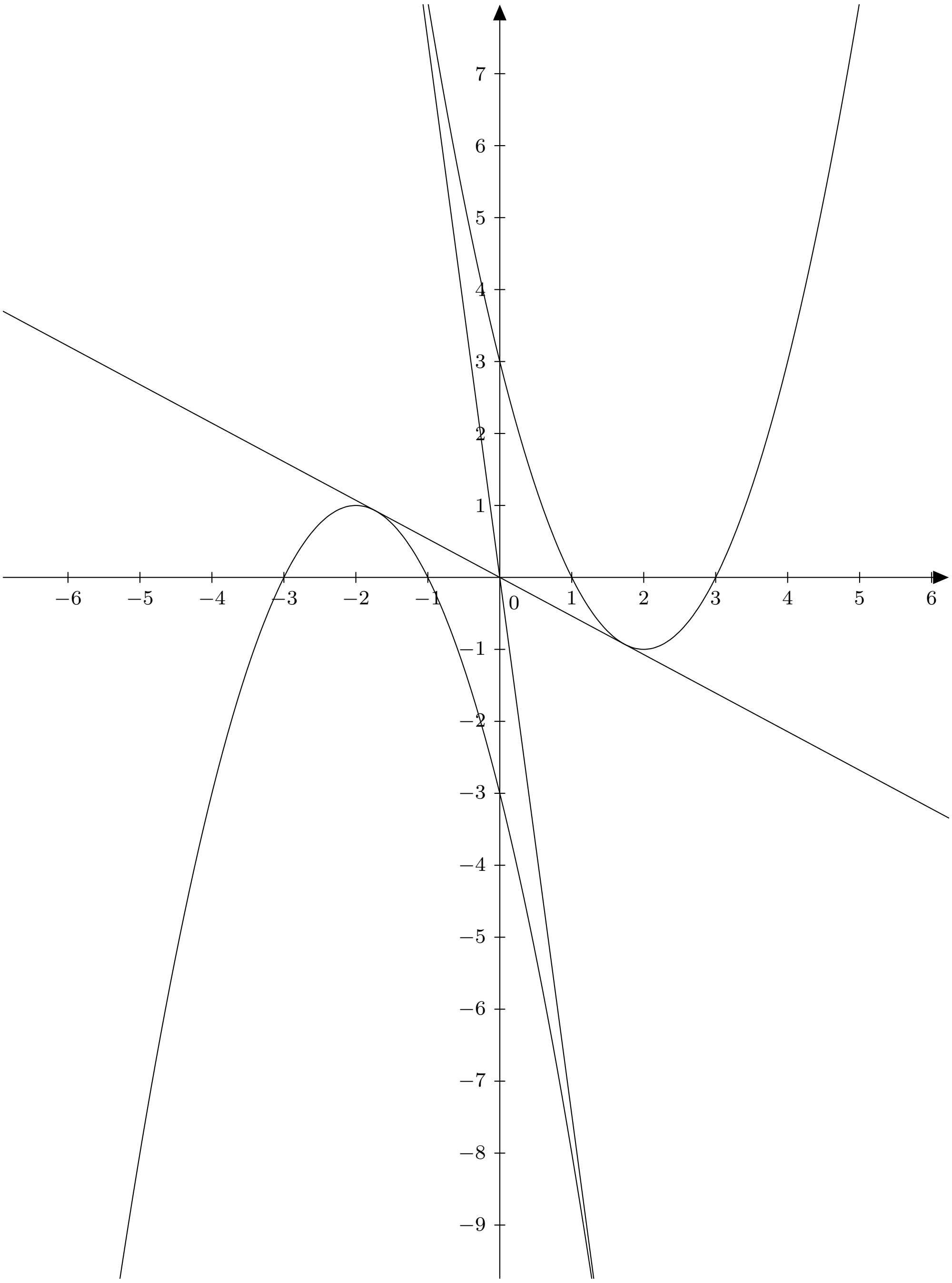

Figure 1 – Representation de f et g