Exercice - M0137C

1) Déterminons la limite de la suite (a_n) définie par :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$$

Nous avons

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$$

En posant

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Il vient

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On reconnait alors une somme de Riemann.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Conclusion

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$$

1) Déterminons la limite de la suite (b_n) définie par :

$$b_n = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\exp\left(-\frac{n}{k}\right)}{k^2}$$

Nous avons

$$b_n = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\exp\left(-\dfrac{n}{k}\right)}{k^2} = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \frac{\exp\left(-\dfrac{n}{k}\right)}{\dfrac{k^2}{n^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{\exp\left(-\dfrac{n}{k}\right)}{\dfrac{k^2}{n^2}}$$

En posant

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Il vient

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On reconnait alors une somme de Riemann.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left[\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_0^1$$

Conclusion

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e}$$