

Exercice - M0140C

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $z \neq 1$, on pose

$$f(z) = \frac{z-5}{z-1}$$

1) Calculons $f(2+i)$

$$\begin{aligned} f(2+i) &= \frac{2+i-5}{2+i-1} \\ &= \frac{-3+i}{1+i} \\ &= \frac{(-3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{-3+3i+i-i^2}{1^2+1^2} \\ &= \frac{-3+4i+1}{2} \\ &= \frac{-2+4i}{2} \\ &= -1+2i \end{aligned}$$

Conclusion :

$$f(2+i) = -1+2i$$

2) Résolvons dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 2i$.

$$\begin{aligned} f(z) &= 2i \\ \Leftrightarrow \frac{z-5}{z-1} &= 2i \\ \Leftrightarrow z-5 &= 2i(z-1) \\ \Leftrightarrow z-2iz &= 5-2i \\ \Leftrightarrow z &= \frac{5-2i}{1-2i} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{(5-2i)(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{5+10i-2i+4}{1^2+2^2} \\ \Leftrightarrow &= \frac{9+8i}{5} \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 2i$ est

$$S = \left\{ \frac{9+8i}{5} \right\}$$