Exercice - M0145

Définitions

(i) Soit $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $a<b$. On appelle subdivision de $[a,b]$ tout uplet

$$d=(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n) \quad \text{ou} \quad a=x_0<x_1w\cdots<_{n-1}<x_n=b$$

On appelle module de la subdivision d précédente le réel $\delta(d)=\max(x_{k+1}-x_k, 0\leq k\leq n-1)$.

(ii) Soit $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue.
On appelle somme de Riemann associée à f et à la subdivision d de $[a,b]$ tout somme de la forme :

$$s(d,f)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(u_k) \quad \text{ou} \quad u_k\in[x_k,x_{k+1}], \quad 0\leq k\leq n-1$$

Montrer que : $\forall\epsilon>0, \quad \exists\eta>0 tel\ que : \delta(d)<\eta \quad implique \quad \left|s(d,f)-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|<\epsilon$

Indication : On pourra écrire : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle(x_{k+1}-x_k)f(u_k)=\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(u_k)\mathrm{d}t$