Exercice - M0145C

Montrons que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 tel\ que : \delta(d) < \eta \quad implique \quad \left| s(d,f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| < \epsilon$$

$$\begin{aligned}
\left| s(d,f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(u_k) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(u_k)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(u_k) - f(t))\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(u_k) - f(t))\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(u_k) - f(t)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or f est continue sur le segment $[a,b]$ donc d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$.

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall (x,x') \in [a,b]^2 \qquad |x - x'| < \eta \implies |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Autrement dit, si le pas de la subdivision est inférieur à η on est assuré que $x_{k+1} - x_k < \eta$ et donc que

$$|f(u_k) - f(t)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Nous obtenons alors la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
\left| s(d,f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(u_k) - f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\epsilon}{(b-a)}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon \frac{x_{k+1} - x_k}{b-a} \\
&= \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

En résumé

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \left| s(d,f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| < \epsilon$$

Donc, en prenant des subdivisions de plus en plus fines, $\left| s(d,f) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right|$ tend vers 0, ou encore :

$$\lim_{\delta(d) \to 0} s(d,f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$