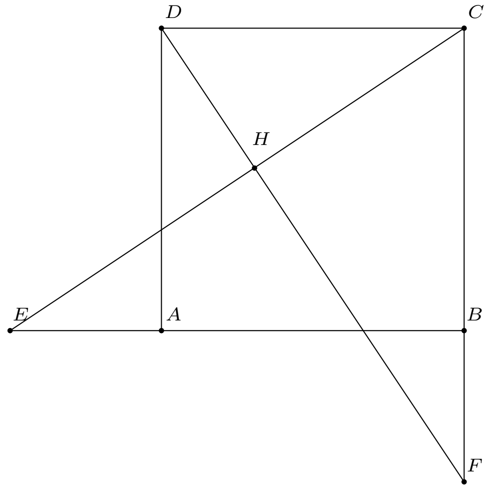
Exercice - M0146C

$ABCD$ est un carré. k un réel supérieur à 1. Les points E et F sont définis par les relations vectorielles suivantes

$$\overrightarrow{EB} = k\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{FC} = k\overrightarrow{BC}$$



Montrons ques les droites (DF) et (EC) sont perpendiculaires.

Méthode 1

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{FD}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{FD} &= (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD}) \\
&= \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} \\
&= k\overrightarrow{AB} \cdot k\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot k\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} \\
&= k^2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + k\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}
\end{aligned}$$

Or $ABCD$ est un carré, donc, d'une part

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD} \qquad \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$$

et d'autre part

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

Donc

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{FD} = 0 - k\|\overrightarrow{AB}\|^2 + k\|\overrightarrow{BC}\|^2 + 0 = 0$$

Conclusion : le produit scalaire $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{FD}$ est nul, les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont orthogonaux, et donc les droites (EC) et (FD) sont perpendiculaires.

Méthode 2

Utilisons à nouveau le produit scalaire mais cette fois en utilisant les coordonnées des vecteurs dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ Les coordonnées des points sont donc pour A, B, C et D

$$A(0,0) \qquad B((1,0) \qquad C(1,1) \qquad D(0,1)$$

Nous en déduisons

$$\overrightarrow{AB}(1,0) \qquad \overrightarrow{CD}(-1,0) \qquad \overrightarrow{BC}(0,1) \qquad \overrightarrow{AD}(1,0)$$

Et donc
$$\overrightarrow{EB} = k\overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{EB}(k,0) \qquad \overrightarrow{FC} = k\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{FC}(0,k)$$
et finalement
$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{EC}(k,1) \qquad \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} \qquad \overrightarrow{FD}(-1,k)$$
Il vient alors
$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{FD} = k \times (-1) + 1 \times k = -k + k = 0$$
Conclusions les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont orthogonaux et les droites (EC) et (FD) sont perpendiculaires.

Méthode 3

Considérons le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$. Considérons les coefficients directeurs des droites (EC) et (FD). Pour la droite (EC)
$$K_{EC} = \frac{BC}{EB} = \frac{BC}{kAB} = \frac{1}{k}$$
De même, pour la droite (DF)
$$K_{DF} = -\frac{CF}{DC} = -\frac{kBC}{DC} = -k$$
Nous avons alors
$$K_{EC} \times K_{DF} = \frac{1}{k} \times (-k) = -1$$
Les droites sont orthogonales, propriété bien connue des droites...

Méthode 4

Les triangles EBC et FCD sont semblables et se déduise l'un de l'autre par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ les hypothénuses sont donc orthogonales. et donc les droites (EC) et (DF) sont perpendiculaires.

Méthode 5

Les propriétés élementaires des angles alterns interne et de la somme des angles du triangle permet de démontrer aisément la propriété. Voir la figure ci-dessous