

Exercice - M0147

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 2u_n + 6$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 9 \times 2^n - 6$$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entier (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{6}$

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ». Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
4.
 - a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.
 - b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.
 - c. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1} .
5.
 - a. Vérifier que $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$.
 - b. En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.
 - c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ?