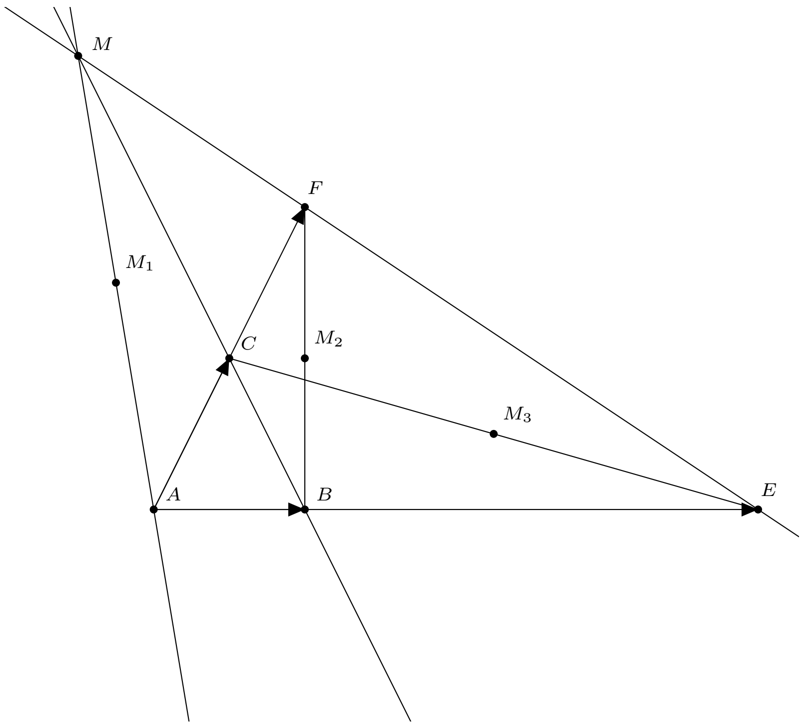
Exercice - M0151C

La situation est la suivante



Les coordonnées des points A, B, C, E et F sont

$$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad E\begin{pmatrix}e\\0\end{pmatrix} \qquad F\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}$$

Cherchons l'équation de la droite (BC). Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de la droite (BC).

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

L'équation cartésienne est donc de la forme

$$x + y + c = 0$$

Le point B appartient à la droite donc

$$1 + 0 + c = 0 \qquad \Rightarrow c = -1$$

donc

$$(BC) \qquad x + y - 1 = 0$$

Cherchons maintenant l'équation de la droite (EF). Soit P un point de la droite. Le vecteur $\overrightarrow{EP}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{EF}$

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-e\\f\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{EP}\begin{pmatrix}x-e\\y\end{pmatrix}$$

La colinéarité de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EP}$ donne

$$-ey - f(x-e) = 0$$

D'ou l'équation de la droite

$$fx + ey - ef = 0$$

Le point M est l'intersection des droites (BC) et (EF) donc ses coordonnées sont solutions du système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ fx & + & ey & = & ef \end{array} \right.$$

Que l'on résout aisément par la méthode des combinaisons

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ex & + & ey & = & e \\ fx & + & ey & = & ef \end{array} \right.$$

Donne par soustraction

$$(f-e)x = ef - e$$

On en déduit

$$x = \frac{e(f-1)}{f-e}$$

Puis

$$y = 1 - \frac{e(f-1)}{f-e} = \frac{f-e-ef+e}{f-e} = \frac{f(1-e)}{f-e}$$

Les coordonnées du point M sont donc

$$M \begin{pmatrix} \frac{e(f-1)}{f-e} \\ -\frac{f(e-1)}{f-e} \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant les coordonnées des point M_1, M_2, M_3 puis les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_2M_3}$

$$M_1 \begin{pmatrix} \dfrac{e(f-1)}{2(f-e)} \\ -\dfrac{f(e-1)}{2(f-e)} \end{pmatrix} \qquad M_2 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{f}{2} \end{pmatrix} \qquad M_3 \begin{pmatrix} \dfrac{e}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} - \dfrac{e(f-1)}{2(f-e)} \\ \dfrac{f}{2} + \dfrac{f(e-1)}{2(f-e)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{f-e-ef+e)}{2(f-e)} \\ \dfrac{f(f-e)+f(e-1)}{2(f-e)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{f(e-1)}{2(f-e)} \\ \dfrac{f(f-1)}{2(f-e)} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_2M_3} \begin{pmatrix} \frac{e-1}{2} \\ -\frac{f-1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\overrightarrow{M_1M_2} \begin{pmatrix} -\dfrac{f(e-1)}{2(f-e)} \\ \dfrac{f(f-1)}{2(f-e)} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{M_2M_3} \begin{pmatrix} \frac{e-1}{2} \\ -\frac{f-1}{2} \end{pmatrix}$$

On remarque que

$$\overrightarrow{M_1M_2} = -\frac{f}{f-e}\overrightarrow{M_2M_3}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_2M_3}$ sont donc colinéaires et nous pouvons conclure que les points $M_1, M_2, M3$ sont alignés.