Exercice - M0154C

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = z^2 + 4z + 3$$

1) Montrons qu'il existe deux points invariants, c'est-à-dire, deux points tels que leur affixe vérifie

$$z = z^2 + 4z + 3 \iff z^2 + 3z + 3 = 0$$

Résolvons cette équation.

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = 9 - 12 = -3$$

On en déduit

$$z_1 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} \qquad z_2 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$$

Conclusion : les points A et B d'affixe respectifs

$$z_A = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_B = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$$

2) Soit A le point d'affixe z_A et B le point d'affixe z_B avec

$$z_A = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} \qquad z_B = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$$

Montron que OAB est un triangle équilatéral.

Les nombres complexes z_A et z_B sont conjugués. On en déduit $|z_A| = |z_B|$ et donc $OA = OB$. Le triangle OAB est donc isocèle. Calculons l'angle $\widehat{BOA}$

$$\text{mes } \widehat{BOA} = \widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}} = \arg \frac{z_A}{z_B}$$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}}{\frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{(3 + i\sqrt{3})^2}{(3 - i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{3})} = \frac{6 + 6i\sqrt{3} - 3}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc

$$\arg \frac{z_A}{z_B} = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

En résumé

$$\text{mes } \widehat{BOA} = \frac{\pi}{3} \qquad \text{et} \qquad OA = OB$$

Conclusion : le triangle OAB est équilatéral.

3) Déterminons l'ensemble (E) des points M d'affixe $z = x + iy$, où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réel.

Calculons s'

$$z' = z^2 + 4z + 3 = (x + iy)^2 + 4(x + iy) + 3 = (x^2 - y^2 + 4x + 3) + i(2xy + 4y)$$

z' doit être réel donc sa partie imaginaire est nulle.

$$\Im z' = 0 \iff 2xy + 4y) = 0 \iff y = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2$$

Conclusion : l'ensemble E est la réunion des droites d'équation $y = 0$ (autrement dit l'axe des abscisses) et d'équation $x = -2$.

Alternativement nous pouvons écrire

$$z' \in \mathbb{R} \iff z' = \bar{z}' \iff z^2 + 4z + 3 = \overline{z^2 + 4z + 3} \iff z^2 + 4z + 3 = \bar{z}^2 + 4\bar{z} + 3$$

Il vient

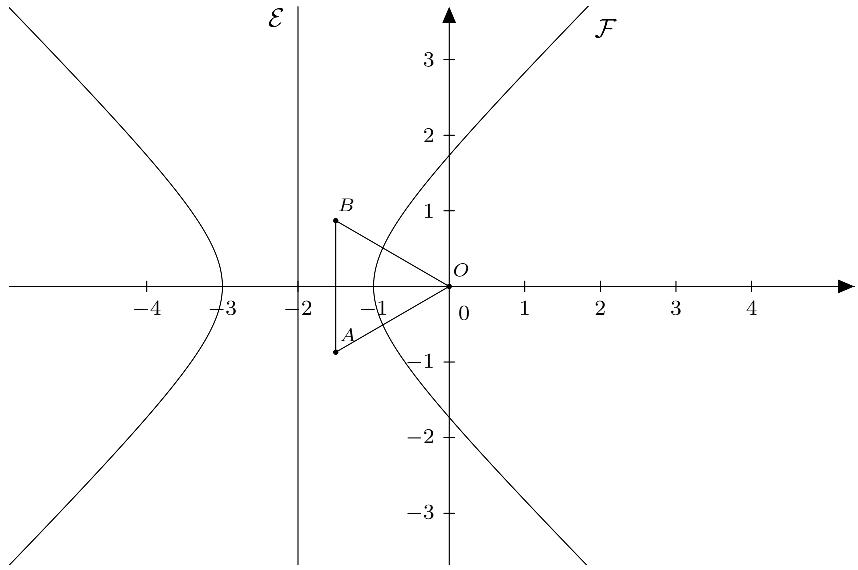
$$z^2 - \bar{z}^2 + 4(z - \bar{z}) = 0 \iff (z - \bar{z})(z + \bar{z} + 4) = 0 \iff z = \bar{z} \qquad \text{ou} \quad 2\Re z + 4 = 0$$

$$z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R} \qquad \Re z = -2$$

On retouve les résultats précédents.

Remarque : le polynome $z^2 + 4z + 3$ étant à coefficient réel, il était évident que pour z réel, z' est également réel

4) Représentons le triangle OAB et l'ensemble $\mathcal{E}$.



Remarque : on a également représenté l'ensemble $\mathcal{F}$ des points points M tels que M' soit sur l'axe imaginaire, autrement l'ensemble des points tels que

$$x^2 - y^2 + 4x + 3 = 0$$

L'ensemble $\mathcal{F}$ est constituée de deux branches d'hyperbole.