Exercice - M0158C

Soit la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\sqrt{x}}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star$$

On considère la suite (u_n) définie par u_n est la solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

1) Justifions l'existence de la suite (u_n). u_n est la solution de l'équation $f_n(x) = 0$. Montrons que l'équation a toujours une solution. Etudions donc les variations des fonctions f_n.

$$f_n'(x) = 2 + \frac{1}{2n\sqrt{x}}$$

f_n' est manifestement positive. Les fonctions f_n sont donc strictement croissantes. Elles sont continues, car dérivables. De plus nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad f_n(0) = -2 \qquad f_n(1) = \frac{1}{n} > 0$$

et donc $0 \in [f(0); f(1)]$.Nous pouvons donc appliquer le théorème des valeurs et affimer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; 1]$.

2) Montrons que la suite est convergente. D'après la question 1), nous savons que pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [0; 1]$. La suite (u_n) est donc bornée. Montrons par ailleurs que $f_n(u_{n+1}) > 0$.

$$f_n(u_{n+1}) = 2u_{n+1} - 2 + \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{n}$$

Mais par définition de la suite (u_n), nous avons

$$f_n(u_n) = 0 \implies 2u_n - 2 + \frac{\sqrt{u_n}}{n} \implies u_n = 1 - \frac{\sqrt{u_n}}{2n}$$

donc

$$u_{n+1} = 1 - \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{2(n+1)}$$

Reportons cette expression dans le calcul de $f_n(u_{n+1})$.

$$f_n(u_{n+1}) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{2(n+1)}\right) - 2 + \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{n} = \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{n} - \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{n+1} = \sqrt{u_{n+1}}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) > 0$$

Donc, comme la fonction f est strictement croissante nous avons :

$$f_n(u_{n+1}) > 0 \implies f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n) \implies u_{n+1} > u_n$$

La suite (u_n) est donc croissante. Elle est majorée par 1, elle est donc convergente, puisque toute suite croissante majorée converge.

Conclusion : la suite (u_n) est convergente.

3) Déterminons limite de la suite (u_n). D'après la question 2) la suite est convergente. Soit ℓ sa limite. Nous avons

$$\forall n \geq 1 \qquad u_n = 1 - \frac{\sqrt{u_n}}{2n}$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\sqrt{u_n}}{n}\right) \implies \ell = 1$$

Conclusion

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 1}$$